Nombres complexes.

Questions de cours

$\boxed{\textbf{K05.1}}$ **Alice, Benjamin, Caroline, Emma, Nicolas, Théophile**
Inégalité triangulaire.

$\boxed{\textbf{K05.2}}$ **Justine, Léa, Mathilde M., Matthieu B., Quentin F., Sergion, Tom**
Racines n-ièmes de l'unité. Définition et somme.

$\boxed{\textbf{K05.3}}$ **Anastasia, Constance, Emile, Juliane, Nathalie, Noëlle, Quentin P., Teresa**
Equations du second degré.

Exercices

$\boxed{\textbf{K05.4}}$ **Mathilde M., Tom**
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$$

$\boxed{\textbf{K05.5}}$ **Sergio**
Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$C_n = \sum_{p=0}^{n} \cos(px), \ S_n = \sum_{p=0}^{n} \sin(px)$$

1. Préciser les valeurs de C_n et S_n lorsque $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, calculer $C_n + iS_n$. En déduire la valeur de C_n et S_n.

$\boxed{\textbf{K05.6}}$ **Nathalie, Quentin F.**
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sin(k\theta)$$

$\boxed{\textbf{K05.7}}$ **Emma**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$e^z = 3\sqrt{3} - 3i$$

$\boxed{\textbf{K05.8}}$ **Sergio**
Soit θ un réel. Déterminer le module et un argument du nombre complexe

$$Z = e^{i\theta} + e^{2i\theta}$$

$\boxed{\textbf{K05.9}}$ **Nicolas**
Soient u et v deux éléments de $\mathbb{U}$ tels que $uv \neq -1$. Montrer que

$$Z = \frac{u+v}{1+uv}$$

est un réel.

$\boxed{\textbf{K05.10}}$ **Justine**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$$

$\boxed{\textbf{K05.11}}$ **Alice, Noëlle**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$iz^2 + iz + 1 + i = 0$$
2. En déduire les solutions de l'équation :
$$iz^8 + iz^4 + 1 + i = 0$$

$\boxed{\textbf{K05.12}}$ **Benjamin, Quentin P.**
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^4 - (1+3i)z^2 + (-2+2i) = 0$$

K05.13 Anastasia, Teresa

1. Déterminer les racines cubiques du nombre complexe :
$$Z = \frac{-1+i}{4}$$
2. Montrer qu'une seule de ces racines a une puissance quatrième réelle.

K05.14 Emma

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$$

K05.15 Sergio

1. Déterminer les solutions de l'équation
$$1 + z + z^2 + z^3 = 0$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$1 + \frac{z+i}{z-i} + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 = 0$$

K05.16 Léa, Quentin F.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$(z^2+1)^2 + (z^2 - 2z - 1)^2 = 0$$

K05.17 Sergio

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 - \sqrt{3}z + i = 0$$

K05.18 Nicolas

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$z^6 - (3-2i)z^3 + (2-2i) = 0$$

K05.19 Juliane, Nathalie

Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $\sqrt{3} + i$.
En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

K05.20 Matthieu B., Sergio

1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ sous forme algébrique.
2. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

K05.21 Léa, Quentin F.

Déterminer le produit des n racines n-ièmes de l'unité.

K05.22 Caroline, Tom

On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Montrer que :
$$(1+2j)^3 = -3 - 6j$$

K05.23 Emile, Mathilde M.

Trouver les nombres complexes z vérifiant
$$z^4 = -4$$

K05.24 Constance Bo.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$z^6 = \frac{-4}{1 + i\sqrt{3}}$$

K05.25 Théophile

Trouver tous les nombres complexes z vérifiant :
$$27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$$

K05.26 Juliane, Nicolas

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$(z+1)^n = (z-1)^n$$

$\boxed{\text{K05.27}}$ Nathalie

Montrer que pour tous réels a et b

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

$\boxed{\text{K05.28}}$ Caroline, Emile

Exprimer $\cos^4(\theta)$ en fonction de $\cos(4\theta)$ et $\cos(2\theta)$.

$\boxed{\text{K05.29}}$ Quentin F.

Montrer que pour tous réels a et b

$$\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$\boxed{\text{K05.30}}$ Benjamin

Calculer de deux manières

$$|1+e^{i\theta}|^2$$

et en déduire la formule :

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(\theta)\right)$$

puis calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

$\boxed{\text{K05.31}}$ Léa

Linéariser $\cos^4(x)$

$\boxed{\text{K05.32}}$ Nicolas

Linéariser $\sin^4(x)$

$\boxed{\text{K05.33}}$ Anastasia

Linéariser $\cos(x)\sin^3(x)$.

$\boxed{\text{K05.34}}$ Emma

Etablir que pour tout réel x, on a

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

Que dire de $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$?

$\boxed{\text{K05.35}}$ Alice, Noëlle

Soit x un réel. Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$, puis en fonction de $\cos(x)$ seulement.

$\boxed{\text{K05.36}}$ Constance Bo.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} \cos(a)+\cos(b)+\cos(c) = 0 \\ \sin(a)+\sin(b)+\sin(c) = 0 \end{cases}$$

Montrer alors que :

$$\begin{cases} \cos(2a)+\cos(2b)+\cos(2c) = 0 \\ \sin(2a)+\sin(2b)+\sin(2c) = 0 \end{cases}$$