Dénombrement. Nombres complexes.

Questions de cours

$\boxed{\textbf{K04.1}}$ **Alexandre, Cécile, Constance Be., Juliette, Marion, Matthieu P.**
Formule de Pascal.

$\boxed{\textbf{K04.2}}$ **Camille, Damien, Hélène, Marie**.

Formule du binôme de Newton.

$\boxed{\textbf{K04.3}}$ **Capucine, Manon, Mathilde L.**.

Formule de Vandermonde.

$\boxed{\textbf{K04.4}}$ **Adèle, Claire, Inès, Jean-Damien, Manon P., Martin, Mathilde B.**.
Inégalité triangulaire.

Dénombrement

$\boxed{\textbf{K04.5}}$ **Jean-Damien**

Soit E un ensemble à n éléments, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties.

1. Que vaut $Card(\mathcal{P}(E))$? Le montrer par récurrence sur n.
2. Montrer qu'il y a autant de parties de E que d'éléments dans $\{0,1\}^n$ et conclure.

$\boxed{\textbf{K04.6}}$ **Juliette**

On extrait simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Cet ensemble est appelé une "main".

1. Combien y a-t-il de mains possibles au total ?
2. Combien contenant un carré ?
3. Combien contenant deux paires distinctes ?
4. Combien contenant un full ?
5. Combien contenant un brelan ?

$\boxed{\textbf{K04.7}}$ **Adèle**

Un ascenseur dessert 8 étages. Six personnes le prennent au rez-de-chaussée. Dénombrer le nombre de cas où

1. Une personne descend à un étage, 2 à un autre, et 3 à un autre.
2. 2 personnes au moins descendent au même étage.
3. 2 personnes descendent au même étage, les autres descendent chacune à des étages différents, différents du précédent.

$\boxed{\textbf{K04.8}}$ **Damien, Hélène**

Un échiquier comporte 8 lignes et 8 colonnes. Une tour peut prendre toute pièce se situant sur la même colonne ou sur la même ligne qu'elle.

1. Combien y a-t-il de façons de placer 8 tours sur l'échiquier pour qu'aucune d'entre elles ne soit menacée par une autre ?
2. Pour $k \in [\![1,7]\!]$, combien y a-t-il de façons de placer k tours sur l'échiquier pour qu'aucune d'entre elles ne soit menacée par une autre ?

$\boxed{\textbf{K04.9}}$ **Manon V.**

Raymond Queneau a écrit un ouvrage intitulé *Cent mille milliards de poèmes.* Il est composé de 10 pages contenant chacune 14 vers. Le lecteur peut composer son propre poème de 14 vers en prenant le premier vers de l'une des 10 pages, puis le second de l'une des 10 pages ...
Justifier le titre de l'ouvrage.

$\boxed{\textbf{K04.10}}$ **Camille, Marie**

Soit A l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun "1". (On rappelle qu'un nombre à 7 chiffres ne commence pas par 0.
Déterminer les cardinaux des ensembles suivants :

1. A
2. A_1, ensemble des nombres de A ayant 7 chiffres distincts.
3. A_2, ensemble des nombres pairs de A.
4. A_3, ensemble des nombres de A dont les chiffres forment une suite strictement croissante (dans l'ordre où ils sont écrits).

K04.11 **Martin**

On doit placer autour d'une table ronde un groupe de $2n$ personnes, n hommes et n femmes, qui constituent n couples. Combien existe-t-il de dispositions :

1. au total ?
2. en respectant l'alternance des sexes ?
3. sans séparer les couples ?
4. en remplissant les deux conditions précédentes ?

K04.12 **Claire, Manon P.**

On dispose de n objets ($n \geqslant 1$) et de trois boîtes B_1, B_2, B_3.

1. De combien de façons peut-on ranger ces n objets dans les trois boîtes ?
2. De combien de façons peut-on ranger les n objets dans les trois boîtes de telle sorte que la boîte B_1 reste vide ?
3. De combien de façons peut-on ranger les n objets dans les trois boîtes de telle sorte que les boîtes B_1 et B_2 restent vides ?
4. De combien de façons peut-on ranger les n objets dans les trois boîtes de telle sorte qu'aucune des boîtes ne reste vide ?

K04.13 **Constance, Marion**

Soit $n \geqslant 2$. On a un ensemble E de n personnes. Chacune envoie une lettre et une seule à l'une des $n-1$ autres personnes.

1. Combien y a-t-il de situations possibles ?
2. Constance est l'une de ces personnes. Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, déterminer le nombre de situations possibles où Constance reçoit exactement j lettres.

(Variante : Marion reçoit les lettres ...)

K04.14 **Mathilde B.**

Pour tout nombre $n \in \mathbb{N}^*$, combien y a-t-il de nombres entiers naturels dont l'écriture en base dix comporte exactement n chiffres dont un seul est égal à 1 ?

K04.15 **Mathilde L.** On a un centre aéré comprenant n enfants.
On souhaite créer deux équipes pour un jeu : une équipe bleue et une équipe rouge. Les deux équipes peuvent chacune comporter un nombre quelconque de joueurs, la seule condition est qu'il y ait exactement un joueur qui soit Bleu ET Rouge, les autres peuvent être bleus, rouges, ou ne pas être dans une équipe du tout.
Combien y a-t-il de manières de créer ces deux équipes ?

K04.16 **Inès**

Soit E un ensemble fini tel que $Card(E) = n$. Combien y a-t-il de façons d'écrire un couple (A, B) avec A et B deux parties de E disjointes ?

K04.17 **Juliette**

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$$

K04.18 **Constance Be, Juliette, Marion**

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$$

K04.19 **Manon V.**

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(n-k+1)}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+2}-2}{(n+1)(n+2)}$$

K04.20 **Mathilde B.**

1. Montrer que pour tous n, k, i,
$$\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{n-i}$$
2. En déduire pour tout n, la valeur de
$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}$$

Nombres complexes

$\boxed{\text{K04.21}}$ Marion, Martin

Déterminer une forme algébrique de :

$$z = \frac{(1+i)^5 - 1}{(1+i)^5 + 1}$$

$\boxed{\text{K04.22}}$ Adèle, Mathilde L.

Déterminer le module et un argument de :

$$u = 1 + i$$
$$v = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + i\sqrt{2})$$
$$w = \frac{u}{v}$$

En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$\boxed{\text{K04.23}}$ Camille, Marie

Donner la forme exponentielle de :

$$u = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$$
$$v = 1 + i$$
$$w = u \times v$$

En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$\boxed{\text{K04.24}}$ Constance Be.

Calculer $(i + \sqrt{3})^{2011}$.

$\boxed{\text{K04.25}}$ Cécile, Matthieu

Déterminer la partie réelle et imaginaire du nombre suivant :

$$Z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$$

$\boxed{\text{K04.26}}$ Alexandre, Damien

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule d'Euler, calculer $\cos^4(\theta)$ en fonction de $\cos(4\theta)$ et $\cos(2\theta)$.

$\boxed{\text{K04.27}}$ Capucine

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\exp\left(-i\frac{\theta}{2}\right)$.
   Que valent $|1 + e^{i\theta}|$ et $\arg\left(1 + e^{i\theta}\right)$?
2. Simplifier la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$$

$\boxed{\text{K04.28}}$ Inès

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $4^n \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) = \mathrm{Re}\left((1 + \sqrt{3}i)^{2n}\right)$.
2. Simplifier la somme $\sum\limits_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2k}(-3)^k$

$\boxed{\text{K04.29}}$ Manon P.

Soit x un réel. Exprimer $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
Exprimer ensuite $\cos(4x)$ seulement en fonction de $\cos(x)$.

$\boxed{\text{K04.30}}$ Jean-Damien

En exprimant de deux manières différentes le module de $1 + e^{i\theta}$, montrer la formule :

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(\theta)\right)$$

$\boxed{\text{K04.31}}$ Camille

Soient z et z' deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$.
Démontrer que $\dfrac{z + z'}{1 + zz'}$ est réel et préciser son module.