Dénombrement

Questions de cours

$\boxed{\textbf{K03.1}}$ **Mathilde M.**.

Formule du crible pour $n = 3$

$\boxed{\textbf{K03.2}}$ **Caroline**

Dénombrement des combinaisons

$\boxed{\textbf{K03.3}}$ **Anastasia, Benjamin, Constance Bo., Nathalie, Nicolas, Noëlle**.

Formule de Pascal.

$\boxed{\textbf{K03.4}}$ **Alice, Emile, Emma, Léa T., Quentin P., Teresa**.

Formule du binôme de Newton.

$\boxed{\textbf{K03.5}}$ **Matthieu B., Justine, Sergio, Théophile, Tom**.

Formule de Vandermonde.

Dénombrement

$\boxed{\textbf{K03.6}}$ **Constance Bo.**

1. Soit E un ensemble à n éléments et soit $k \in [\![0, n]\!]$. Combien y a-t-il de parties de E à k éléments ?
2. En déduire que le nombre de parties de E est égal à 2^n.
3. On numérote les éléments de E, de sorte que $E = \{x_1, \dots, x_n\}$. Expliquer pourquoi il y a autant de parties de E que d'éléments dans l'ensembles $\{0, 1\}^n$, et retrouver le résultat du 2.

$\boxed{\textbf{K03.7}}$ **Teresa**

On a n élèves dans la cour de l'école. Combien y a-t-il de manières de les mettre en file indienne ? Et de les mettre en ronde ?

$\boxed{\textbf{K03.8}}$ **Teresa**

A partir de combien d'élèves est-on sûr de trouver deux élèves portant les mêmes initiales dans un lycée ? (Chaque élève a une initiale pour le prénom et une pour le nom, par exemple, Antoine Dupont a pour initiales A.D.)

$\boxed{\textbf{K03.9}}$ **Anastasia**

Un voleur a observé que le code de votre immeuble est composé de 5 chiffres, ne commence pas par 0 et contient 8. De combien d'essais (au plus) a-t-il besoin pour trouver le code ?

$\boxed{\textbf{K03.10}}$ **Emile, Léa T.**

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir :

1. sans imposer de contraintes sur les cartes ?
2. contenant 5 carreaux ou 5 piques ?
3. 2 carreaux et 3 piques ?
4. au plus un roi ?
5. 2 rois et 3 piques ?

$\boxed{\textbf{K03.11}}$ **Théophile, Tom**

On tire successivement et avec remise 5 boules d'un ensemble de 15 boules numérotées de 1 à 15. Un résultat est la suite ordonnée dans l'ordre du tirage des 5 nombres tirés.

1. Combien de résultats peut-on obtenir ?
2. Combien de résultats formés de 5 nombres différents 2 à 2 peut-on obtenir ?
3. Combien de résultats uniquement formés avec les nombres 1 et 2 peut-on obtenir ?
4. Combien de résultats formés de deux 1 et de trois 2 peut-on obtenir ?
5. Combien de résultats formés de deux 1 puis de trois 2 peut-on obtenir ?
6. Combien de résultats formés de 2 nombres différents (et 2 seulement) peut-on obtenir ?

K03.12 **Nicolas, Noëlle**

Un ascenseur dessert 8 étages. Six personnes le prennent au rez-de-chaussée. Dénombrer le nombre de cas où

1. 2 personnes au moins descendent au même étage.
2. 2 personnes descendent au même étage, les autres descendent chacune à des étages différents, différents du précédent.
3. Une personne descend à un étage, 2 à un autre, et 3 à un autre.

K03.13 **Benjamin, Nathalie**

On tire successivement et sans remise 6 jetons d'un sac contenant 26 jetons portant les lettres de A à Z. On appelle tirage la suite ordonnée obtenue.
Combien peut-on former de tirages :

1. différents ?
2. tels que les lettres obtenues aux rangs pairs soient des voyelles et celles obtenues aux rangs impairs des consonnes ?
3. tels que les lettres obtenues aux rangs pairs soient des voyelles ?
4. tels que les lettres forment une suite croissante dans l'ordre alphabétique ?
5. qui sont des suites de 6 lettres consécutives de l'alphabet apparaissant dans l'ordre naturel ?
6. qui sont des suites de 6 lettres consécutives de l'alphabet(pas forcément dans l'ordre) ?

K03.14 **Noëlle**

Le pape est mort ... On réunit tous les cardinaux en conclave, certains se connaissent et se saluent, d'autres ne se connaissent pas, ou sont fâchés, et ne se saluent pas.
Montrer que deux d'entre eux vont saluer exactement le même nombre de personnes.

K03.15 **Mathilde M.**

Un échiquier comporte 8 lignes et 8 colonnes. Une tour peut prendre toute pièce se situant sur la même colonne ou sur la même ligne qu'elle.

1. Combien y a-t-il de façons de placer 8 tours sur l'échiquier pour qu'aucune d'entre elles ne soit menacée par une autre ?
2. Pour $k \in [\![1, 7]\!]$, combien y a-t-il de façons de placer k tours sur l'échiquier pour qu'aucune d'entre elles ne soit menacée par une autre ?

K03.16 **Alice**

Quatre garçons et deux filles s'assoient sur un banc.

1. Quel est le nombre de dispositions au total ?
2. Si les garçons sont d'un côté et les filles de l'autre ?
3. Si chaque fille est intercalée entre deux garçons ?

K03.17 **Caroline, Juliane**

On doit placer autour d'une table ronde un groupe de $2n$ personnes, n hommes et n femmes, qui constituent n couples. Combien existe-t-il de dispositions :

1. au total ?
2. en respectant l'alternance des sexes ?
3. sans séparer les couples ?
4. en remplissant les deux conditions précédentes ?

K03.18 **Matthieu B.**

On constitue un groupe de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes.

1. De combien de façons peut-on constituer ce groupe ?
2. Si on veut uniquement des hommes ?
3. Si on veut uniquement des personnes de même sexe ?
4. Au moins une femme et au moins un homme ?

K03.19 **Nathalie, Tom**

On dispose de n objets ($n \geqslant 1$) et de 3 boites B_1, B_2, B_3.

1. De combien de façons peut-on ranger ces n objets dans les 3 boites ?
2. De combien de façons peut-on ranger les n objets dans les 3 boites de telle sorte que la boite B_1 reste vide ?
3. De combien de façons peut-on ranger les n objets dans les 3 boites de telle sorte que les boites B_1 et B_2 restent vides ?
4. De combien de façons peut-on ranger les n objets dans les 3 boites de telle sorte qu'aucune des boites ne reste vide ?

K03.20 **Quentin P.**

Soit $n \geqslant 2$. On a un ensemble E de n personnes. Chacune envoie une lettre et une seule à l'une des $n-1$ autres personnes.

1. Combien y a-t-il de situations possibles ?
2. Quentin est l'une de ces personnes. Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, déterminer le nombre de situations possibles où Quentin reçoit exactement j lettres.

K03.21 **Sergio**

On note P_n le nombre de partitions possibles dans un ensemble à n éléments (on pose $P_0 = P_1 = 1$).

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k$$
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \leqslant n!$.
3. On note $S(n,k)$ le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k sous-ensembles non vides. Montrer que pour tous n, k,
$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$$
Quelle relation entre les $S(n,k)$ et P_n ?

K03.22 **Justine**

Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$. On note $P_{n,p}$ le nombre de façons de faire une partition de $[\![1, n]\!]$ en p ensembles.

1. Montrer que
$$P_{n+1,p+1} = P_{n,p} + (p+1)P_{n,p+1}$$
2. Donner les valeurs de $P_{n,p}$ pour $n, p \in [\![1, 5]\!]$ (par exemple dans un tableau)
3. Montrer les égalités suivants :
$$P_{n+1,n} = \binom{n+1}{2}, \qquad P_{n+1,2} = 2^n - 1$$

K03.23 **Benjamin, Nathalie**

Soit $n \geqslant 1$. Calculer
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} 2^{\frac{k}{2}}$$

K03.24 **Quentin F.**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Soit A un polygone régulier à $(n+1)$ côtés et soit E l'ensemble formé par toutes les arêtes reliant deux sommets disjoints de A.
En dénombrant E de deux manières différentes, montrer la formule :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
2. En se servant de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3)$, montrer la formule :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

K03.25 **Anastasia**

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$$

K03.26 **Théophile, Tom**

1. Pour k et n entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$, démontrer la formule :
$$(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}$$
2. En déduire pour n entier naturel la somme :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$$
3. Calculer pour n entier naturel non nul, la somme :
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$$

K03.27 **Matthieu B.**

Soit $n \geqslant 1$. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k k$$

K03.28 **Nicolas, Sergio**

Soit $n \geqslant 0$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$$

K03.29 **Léa T.**

Soient k, p, n trois entiers vérifiant $0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$.

1. Montrer que

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k} = \binom{n}{p}$$

2. En déduire la valeur de

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$$

K03.30 **Alice**

Soient n et p deux entiers tels que $n \geqslant p$. Montrer que

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

de deux manières différentes, dont une par le dénombrement.

K03.31 **Emma**

Soit E un ensemble fini tel que $Card(E) = n$, avec $n \geqslant 1$. Déterminer le nombre de couples (A, B) de $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ tels que $A \subset B$.

K03.32 **Léa T.**

Soit E un ensemble fini tel que $Card(E) = n$. Soit $A \subset E$ un sous-ensemble de E contenant p éléments. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?