Sommes, suites, récurrences + Dénombrement

Questions de cours

$\boxed{\textbf{K02.1}}$ **Alexandre, Damien**.
Définition d'une suite minorée.

$\boxed{\textbf{K02.2}}$ **Matthieu P.**.
Tout sur les suites géométriques.

$\boxed{\textbf{K02.3}}$ **Claire, Léa C.**.
Tout sur les suites arithmético-géométriques.

$\boxed{\textbf{K02.4}}$ **Marion**.

Pour $n \geqslant 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\boxed{\textbf{K02.5}}$ **Alexandre, Damien, Manon P., Marie**.
Pour $n \geqslant 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\boxed{\textbf{K02.6}}$ **Capucine, Mathilde L.** Définition d'une partition d'un ensemble.

$\boxed{\textbf{K02.7}}$ **Camille, Capucine, Mathilde L.**.
Formule du crible pour trois ensembles.

$\boxed{\textbf{K02.8}}$ **Inès, Martin, Mathilde B.**.
Dénombrement des arrangements.

$\boxed{\textbf{K02.9}}$ **Cécile, Jean-Damien**.
Dénombrement des combinaisons.

Suites

$\boxed{\textbf{K02.10}}$ **Manon V.**.
Etudier les variations de la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{10^n}{n!}$$

$\boxed{\textbf{K02.11}}$ **Alexandre, Damien, Manon P., Marie, Marion**.
Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 4$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 5u_n - 8.$$

Déterminer u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Calculer ensuite $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} u_k$.

Variante 1 : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 5$ avec $u_0 = 6$.
Variante 2 : $u_{n+1} = 3u_n + 6$ avec $u_1 = 2$.

$\boxed{\textbf{K02.12}}$ **Constance Be.,Juliette**.
Soit (u_n) une suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 10$$

Trouver une formule générale donnant u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\textbf{K02.13}}$ **Camille**.
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \neq 1$.
2. Soit (v_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{u_n - 1}$. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_{n+1} en fonction de v_n.
3. Déterminer alors une expression de v_n et u_n en fonction de n.

$\boxed{\textbf{K02.14}}$ **Mathilde B.**

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{2^n - 4n + 3}{2}, \qquad v_n = \frac{2^n + 4n - 3}{2}$$

Que dire des suites $(u_n + v_n)$ et $(u_n - v_n)$?
En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

$\boxed{\textbf{K02.15}}$ **Inès, Martin**.
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$$

1. Montrer que cette suite est bien définie et strictement positive.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$.
   Montrer que la suite (v_n) est arithmético-géométrique.
   En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.

$\boxed{\textbf{K02.16}}$ **Manon P.**.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$1 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 = 0$$

Récurrences

$\boxed{\textbf{K02.17}}$ **Capucine,Cécile, Jean-Damien, Mathilde L., Matthieu P.**.

Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4}$$

$\boxed{\textbf{K02.18}}$ **Léa C., Lisa.**.

Soit $a > -1$ un réel. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na$$

$\boxed{\textbf{K02.19}}$ **Camille**. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $5^n \geqslant 2^n + 3^n$.

$\boxed{\textbf{K02.20}}$ **Mathilde B.**. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6.

$\boxed{\textbf{K02.21}}$ **Hélène**.

1. Montrer que $\forall a, b > 0$, $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ et discuter les cas d'égalité.
2. Soient $a_1, \ldots, a_n > 0$, non tous égaux, tels que $\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$.
   Montrer par récurrence que $\sum_{i=1}^{n} a_i > n$.

$\boxed{\textbf{K02.22}}$ **Inès, Martin**.

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Sommes

$\boxed{\textbf{K02.23}}$ **Claire, Léa C.**

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2^n - 4n + 3}{2}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+2} u_k$.

$\boxed{\textbf{K02.24}}$ **Damien** Pour tout entier $n \geqslant 3$, calculer :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-2} k(k+1)(k+2)$$

$\boxed{\textbf{K02.25}}$ **Manon V.**

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min(i, j) = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$\boxed{\textbf{K02.26}}$ **Matthieu P.**.

Déterminer a, b, c réels tels que

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

$\boxed{\textbf{K02.27}}$ **Manon P.**.

Calculer $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$.

Ensembles

K02.28 **Adèle**

1. Soit E un ensemble à n éléments. On pose :
$$H = \{A, B \in \mathcal{P}(E)\ /\ A \cup B = E\}$$
Calculer $Card(H)$;
2. On pose
$$H_k = \{A_1, \dots, A_k \in \mathcal{P}(E)\ /\ A_1 \cup \dots \cup A_k = E\}$$
Calculer $Card(H_k)$.

Dénombrement

K02.29 **Adèle, Manon V.**

Combien y a-t-il d'annagrammes du mot ANAGRAMME ?

K02.30 **Claire, Léa C.**

Déterminer le nombre d'anagrammes de :
$$CLAIREMILON$$
Variante : Déterminer le nombre d'anagrammes de :
$$LEACHAUVET$$

K02.31 **Camille, Marie, Marion**.

En France, les numéros de téléphone possèdent 10 chiffres (on suppose que tous les nombres de 10 chiffres sont des numéros possibles).

1. Calculer le nombre de numéros de téléphone ne comportant pas de 1.
2. On peut assimiler le numéro de téléphone à un nombre comportant 10 chiffres. Combien de numéros de téléphone ne comportent pas de 1 et sont des nombres pairs ?
3. Combien peut-on créer de numéros de téléphone avec des chiffres distincts ?

K02.32 **Alexandre, Damien**

1. A l'aide des neuf chiffres $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, combien peut-on écrire :
   (a) de nombres de 3 chiffres ?
   (b) de nombres de 3 chiffres distincts ?
   (c) de nombres de 6 chiffres distincts ?
2. On range les nombres de 6 chiffres précédents par ordre croissant.
   (a) Quel est le plus petit de ces nombres ?
   (b) Quel est le 25-ième ?

K02.33 **Claire, Constance Be., Hélène, Léa C., Lisa** On joue au Poker avec un jeu de 32 cartes (variante : avec un jeu de 52 cartes). Un "jeu" correspond à une poignée comportant 5 cartes qu'on choisit simultanément.

1. Combien peut-on former de jeux dits "Full" c'est-à-dire d'une poignée comportant 3 cartes d'une même hauteur, et les 2 dernières cartes restantes également de même hauteur (par exemple, 3 rois et 2 valets) ?
2. Combien peut-on former de jeux comportant un "carré", c'est-à-dire quatre cartes identiques dans la poignée.
3. Combien y a-t-il de "quinte flush" possibles, c'est-à-dire de suites de 5 cartes consécutives dans une même couleur ?

K02.34 **Camille, Capucine, Mathilde L.**.

1. Un club de 32 membres doit élire parmi ses membres son bureau constitué d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier. Quel est le nombre de bureaux possibles ?
2. Un club de 32 membres (18 hommes et 14 femmes) doit élire parmi ses membres son bureau constitué d'un président (sece indifférent), d'un vice-président du sexe opposé à celui du président, d'un secrétaire (sexe indifférent) et d'un gardien qui est nécessairement un homme. Quel est le nombre de bureaux possibles ?

K02.35 **Manon P., Mathilde B.**. On tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien de tirages différents peut-on obtenir contenant deux carreaux et trois piques ?
2. Combien contenant au moins un roi ?
3. Combien contenant au plus un roi ?

K02.36 **Inès, Martin**. On tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 32 cartes, pour constituer une "main".

1. Combien de mains différentes ?
2. Combien de mains qui contiennent un roi ?
3. Combien de mains contenant exactement deux pique et deux trèfle ?
4. Combien de mains contenant au moins un roi ?
5. Combien de mains contenant un roi et deux coeurs ?

K02.37 **Jean Damien, Juliette** On dispose de n boîtes numérotées $B_1, B_2, \ldots, B_n$, ainsi que de p boules numérotées de 1 à p.

1. Combien y a-t-il de manière de disposer les p boules dans les n boîtes.
2. On décide de peindre toutes les boules en noir, qui deviennent ainsi indiscernables. Combien y a-t-il à présent de manières de disposer les p boules dans les n boîtes ?
3. Nos boules sont toujours noires, mais chaque boîte doit contenir au moins une boule. Combien de possibilités ?
4. Nos boules sont toujours noires, mais chaque boules peut contenir au maximum une boule. Combien de possibilité.