Sommes, suites, récurrences

Questions de cours

$\boxed{\textbf{K01.1}}$ **Justine, Mathilde M., Nicolas**.

Tout sur les suites arithmétiques.

$\boxed{\textbf{K01.2}}$ **Nathalie, Mathilde M., Nicolas**.

Tout sur les suites géométriques.

$\boxed{\textbf{K01.3}}$ **Caroline, Constance Bo., Léa T., Quentin F., Tom**.

Suites croissantes, décroissantes.

$\boxed{\textbf{K01.4}}$ **Constance Bo., Juliane, Léa T., Quentin P., Tom**.

Suites majorées.

$\boxed{\textbf{K01.5}}$ **Benjamin, Emma**.

Pour $n \geqslant 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

$\boxed{\textbf{K01.6}}$ **Caroline, Emile, Matthieu B., Quentin F., Sergio**.

Pour $n \geqslant 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$\boxed{\textbf{K01.7}}$ **Alice, Noëlle, Teresa, Théophile**.

Pour $n \geqslant 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\boxed{\textbf{K01.8}}$ **Anastasia, Juliane, Noëlle, Quentin P.**.

Pour $n \geqslant 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Suites monotones, bornées

$\boxed{\textbf{K01.9}}$ **Alice, Emma, Sergio**.

Etudier les variations de la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{10^n}{n!}$$

(variante : 3 au lieu de 10)

$\boxed{\textbf{K01.10}}$ **Emile, Justine, Matthieu B., Teresa**.

Soit $a > -1$ un réel. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geqslant 1 + na$$

$\boxed{\textbf{K01.11}}$ **Teresa**.

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + \frac{u_n}{2}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \frac{1}{2}$.

$\boxed{\textbf{K01.12}}$ **Caroline, Quentin F.**

On considère la suite (w_n) définie pour $n \geqslant 1$ par

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$$

Démontrer que cette suite est minorée par $\frac{1}{2}$ et majorée par 1.

$\boxed{\textbf{K01.13}}$ **Mathilde M.**.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$$

1. Montrer que cette suite est minorée par 0.
2. Montrer que cette suite est strictement décroissante.

Suites usuelles

K01.14 **Anastasia**.

Quelle est la raison de la suite géométrique (u_n) si $u_{19} = 40$ et $u_{22} = 135$?

K01.15 **Benjamin, Emma, Théophile**.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 3.$$

Trouver une formule générale donnant u_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

K01.16 **Constance Bo., Noëlle**.

Soit (u_n) une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 10.$$

Trouver une formule générale donnant u_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

(Variante : $u_{n+1} = 5u_n - 8$)

K01.17 **Quentin P.**

On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,

$$w_{n+1} = 2w_n + 3^n$$

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{w_n}{3^n}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est arithmético-géométrique.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n, puis celle de w_n.
3. Calculer la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite (w_n).

K01.18 **Nathalie**.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

Calculer les 6 premiers termes de la suite, puis conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
Montrer ce résultat.

K01.19 **Alice, Léa T.**.

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{2\}$. On définit (u_n) par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{au_n + 2}{2u_n + a}$$

1. Montrer que u_n est défini pour tout n et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
   Trouver une relation simple entre v_{n+1} et v_n et en déduire une expression de v_n en fonction de a, n et u_0.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

K01.20 **Théophile**.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 3.$$

Trouver une formule générale donnant u_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

K01.21 **Nicolas**.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 5.$$

1. Comment appelle-t-on ce type de suite ?
2. Donner son terme général en fonction de n.
3. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$

Récurrences

K01.22 **Juliane, Quentin P.**

Soit (F_n) la suite définie par $F_0 = F_1 = 1$ et pour tout entiers $n \geqslant 0$,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

K01.23 **Léa T.**.

Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}$, $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6.

K01.24 **Caroline, Quentin F.**

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7.

K01.25 **Mathilde M.**.

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$5^n \geqslant 2^n + 3^n$$

K01.26 **Constance Bo., Matthieu B., Nathalie, Nicolas, Tom**.

Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4}$$

Sommes

K01.27 **Juliane, Quentin P.**

Calculer la somme proposée pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{p=3}^{n+4} \frac{1}{2}p - 3$$

K01.28 **Caroline, Quentin F.**

Calculer la somme proposée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{2p}$$

K01.29 **Nathalie**.

Pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

K01.30 **Nicolas** Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-2} k(k+1)(k+2)$$

Calculer S_n.

K01.31 **Benjamin, Justine, Théophile**.

Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

En déduire le calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

K01.32 **Anastasia, Emma, Tom**.

Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min(i,j) = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

K01.33 **Sergio**.

Montrer que $\displaystyle\sum_{i,j,k=1}^{n} \min(i,j,k) = \sum_{\ell=1}^{n} \ell^3$.