Chapitre 12 - Applications linéaires

1 - Définitions

2 - Noyau et image

3 - Isomorphismes en dimension finie

voir programme Semaine 17.

Chapitre 13 - Dérivation sur un intervalle

1 - Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

- Ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$: notation $\mathbb{R}^I$
- Fonctions de classe $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$
- Dérivée n-ième de $x \mapsto (x+a)$, de $x \mapsto \dfrac{1}{x+a}$
- Dérivée n-ième de $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln(x)$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$
- Opérations dans $\mathcal{C}^n(I)$: structure de $\mathbb{R}$-esp. vectoriel
- Composée, produit : Formule de Leibniz.
- Théorème Limite de la Dérivée.

2 - Théorèmes de dérivation sur un intervalle

- Rappels : maximum/minimum/extremum local d'une fonction
- Théorème : condition nécessaire d'extremum local
- Théorème de Rolle. Interprétation graphique.
- Théorème des Accroissements Finis. Interprétation graphique.
- Inégalité des Accroissements Finis.

3 - Convexité d'une fonction

- On se limite au cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.
- Définitions à partir de la position des tangentes, de la variation de f', du signe de f''.
- exp est convexe : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant x+1}$
- ln est concave : $\boxed{\forall x > 0,\ \ln(x) \leqslant x-1}$, $\boxed{\forall h > -1, \ln(1+h) \leqslant h}$

Démonstrations exigibles :

- $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E
- $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F
- f est injective $\iff \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$
- $E = Vect(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}) \Longrightarrow \mathrm{Im}(f) = Vect(f(\overrightarrow{u_1}), \ldots, f(\overrightarrow{u_n}))$
- Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors f injective $\iff f$ surjective
- Image d'une famille libre par une application injective
- Théorème de Rolle.

Savoirs faire exigibles :

- Savoir montrer qu'une application est linéaire
- Déterminer le noyau, l'image, le rang d'une appl.linéaire
- Savoir si une appl.linéaire est injective/bijective
- Savoir mener un raisonnement (équivalence, égalité d'ensembles,...)

- Connaître les dérivées usuelles sans faute !
- Savoir retrouver rapidement les dérivées n-ièmes usuelles
- Savoir énoncer parfaitement les Théorèmes de Dérivabilité : bonnes hypothèses, bonnes conclusions.