

Chapitre 06 - Limites/comparaisons de fonctions

1 - Limites d'une fonction

voir programme Semaine 8. En plus :

- Limite au voisinage de $\pm\infty$ (limite finie, $+\infty$, $-\infty$)
- Formes indéterminées : $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞
- Si $f \rightarrow \ell$, alors f est bornée au voisinage du point
- Règles sur les limites et la relation d'ordre
- Passage à la limite dans des inégalités (strictes deviennent larges)
- Théorèmes d'encadrement. Théorèmes de comparaison
- $f(x) \rightarrow \ell \iff |f(x) - \ell| \rightarrow 0$
- Produit d'une fonction bornée par une fonction tendant vers 0.
- Théorème de la limite monotone sous toutes ses formes

2 - Fonctions équivalentes

- Définition : $f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$ avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$
- Equivalence avec quotient tend vers 1 (si les fnts sont non nulles)
- Cas des fonctions polynômes, des fonctions rationnelles
- Equivalent pour une fonction dérivable : tangente.
- Equivalents usuels à savoir :

$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$	$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$	$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$	$\ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1$
---	--	--	---

- Avec les équivalents : produit, quotient, chgt de variable : ok!
- On ne somme pas les équivalents, on ne compose pas à gauche
- Le cas de la composition par le logarithme.

3 - Branches infinies des fonctions

- Asymptotes verticales, horizontales, obliques
- Branches paraboliques de dir. asymptotiques (Oy) , (Ox) , $y = ax$

Démonstrations exigibles :

- Définitions équivalentes de $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$
- Un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré
- Composition d'équivalents par la fonction ln.

Savoirs faire exigibles :

- Connaître les fonctions usuelles (définition, propriétés)
- Savoir traduire en mathématiques (avec les ε) les phrases suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$$

- Calculer les limites d'une fonction en un point ou l'infini
- "Lever" les formes indéterminées.
- Connaître parfaitement les équivalents usuels
- Savoir manipuler les équivalents (produits, sommes, ...)
- Etudier les branches infinies d'une fonction