

Chapitre 08 - Nombres complexes

1 - Le corps \mathbb{C}

- Nombres complexes : forme algébrique. Nombre i .
- Partie réelle et partie imaginaire d'un complexe.
- Formule du binôme, factorisation de $z_1^n - z_2^n$
- Conjugué d'un nombre complexe : propriétés.
- Caractérisation des réels, des imaginaires purs.
- Module d'un complexe. Propriétés. Inégalité triangulaire.
- Cercle trigonométrique, ensemble \mathbb{U} , exponentielle complexe $e^{i\theta}$.
- Nombres particuliers : e^{i0} , $e^{i\pi/6}$, $e^{i\pi/4}$, $e^{i\pi/3}$, $e^{i\pi/2}$.
- Formule de Moivre. Formules d'Euler.
- Argument. Forme exponentielle et forme trigonométrique.

2 - Trigonométrie

- Fonctions cosinus, sinus, tangente.
- Propriétés de parité, de périodicité : lecture sur le cercle.
- Propriétés de symétrie grâce au cercle trigonométrique.
- Equation $\cos(x) = \cos(y)$.
- Equation $\sin(x) = \sin(y)$.
- Démonstration de formules : addition, angle moitié, linéarisation

3 - Equations dans \mathbb{C}

- Racines carrées d'un nombre complexe : équation $z^2 = a$, $a \in \mathbb{C}$
- Equation du second degré à coefficients réels ou complexes.
- Factorisation d'un trinôme du second degré
- Racines n -ièmes de l'unité : définition et ensemble \mathbb{U}_n .
- Expression explicite des n racines n -ièmes de l'unité.
- Somme des racines n -ièmes de l'unité.
- Racines n -ièmes d'un nombre complexe non nul.

Démonstrations exigibles :

- Inégalité triangulaire dans \mathbb{C} .
- Résolution d'une équation du second degré dans \mathbb{C} .
- Expression des racines n -ièmes de l'unité.

Savoirs faire exigibles :

- Savoir calculer avec des complexes (+, −, ×, /).
- Savoir calculer un conjugué, un module.
- Savoir mettre un complexe sous forme algébrique.
- Savoir mettre un complexe sous forme trigonométrique.
- Connaître les cosinus et sinus usuels.
- Savoir factoriser $e^{ia} + e^{ib}$ et $e^{ia} - e^{ib}$ par angle moitié.
- Démontrer des formules trigo. avec Moivre et/ou Euler.
- Lire des propriétés sur le cercle trigo. (symétries, parité).
- Savoir trouver des racines carrées de complexes.
- Savoir résoudre une équation du second degré.
- Savoir expliciter parfaitement les racines n -ièmes de l'unité.
- Savoir trouver les racines n -ièmes d'un complexe.

Conformément au programme, les seules formules trigonométriques exigibles des étudiants sont :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

ainsi que celles résultant des symétries des fonctions cos, sin, tan.

Toute autre formule (addition, angle moitié, linéarisation,...) n'est pas à mémoriser, mais doit savoir être redémontrée si demandée dans un exercice.