CHAPITRE 9

Applications linéaires et matrices

"La vie d'un individu n'a rien de linéaire et pourtant son histoire est plus facile à raconter dans une apparente linéarité. " *D. Kennedy*

1 L'ensemble des matrices

1.1 Définitions

Définition 1
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$ à n lignes et p colonnes** tout tableau A de taille $n \times p$ contenant des scalaires (des nombres réels) :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & & a_{n,p} \end{pmatrix} = \Big(a_{i,j}\Big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

Remarque :

Quand on note un terme de la matrice :$a_{i,j}$ ou $[A]_{i,j}$,
- le premier indice i désigne l'**indice ligne**
- le second indice j désigne l'**indice colonne**

Définition 2

On note :

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes, p colonnes et à coefficients réels.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des **matrices carrées** à n lignes et n colonnes.
  On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **carrée d'ordre** n.
- $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à une ligne et p colonnes.
  On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ est une **matrice ligne**.
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et une colonne.
  On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une **matrice colonne**.

Remarques :

R 1 – En pratique on peut "identifier" $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$.

R 2 – Deux matrices sont égales si elles vérifient :
- elles ont le même nombre de lignes
- elles ont le même nombre de colonnes
- tous les coefficients pris deux à deux (sur la même ligne et la même colonne) sont égaux

Exemples :

E 1 – Une matrice carrée est dite **diagonale** si elle est carrée et si tous les termes qui ne sont pas situés sur la diagonale sont nuls :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n})$$

autrement dit, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonale si $\forall i \neq j,\ a_{i,j} = 0$.

E 2 – Une matrice carrée est dite **triangulaire supérieure** si tous les coefficients "en dessous" de la diagonale sont nuls, i.e. si $\forall i > j, a_{i,j} = 0$.

E 3 – Une matrice carrée est dite **triangulaire inférieure** si tous les coefficients "au-dessus" de la diagonale sont nuls, i.e. si $\forall i < j, a_{i,j} = 0$.

E 4 – CAS PARTICULIER : **Matrice nulle**.

$$0_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

E 5 – CAS PARTICULIER : **matrice identité** (ou **matrice unité**) **d'ordre** n :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elle ne contient que des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

1.2 Premières opérations sur les matrices

Définition 3
Soient $A = \Big(a_{i,j}\Big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = \Big(b_{i,j}\Big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
On définit alors **la matrice somme** $A+B$ comme la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ où on additionne deux à deux les termes correspondants aux mêmes lignes et colonnes.

$$A+B = \Big(a_{i,j}+b_{i,j}\Big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$$

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & \sqrt{2} \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Alors $A+B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3+\sqrt{2} \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Remarques :

R 1 – On ne peut pas calculer la somme de deux matrices n'ayant pas le même nombre de lignes ou le même nombre de colonnes

R 2 – L'addition de matrices possède les propriétés suivantes :
- elle est **commutative** : $A+B = B+A$
- elle est **associative** : $(A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C$
- elle possède un **élément neutre** : la matrice nulle. $A+0 = 0+A = A$
- chaque matrice possède un **opposé** qui est $-A = \Big(-a_{i,j}\Big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$

Définition 4
Soit $A = \Big(a_{i,j}\Big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire.
On définit alors **la matrice** λA comme une matrice de même taille que A où on multiplie tous les coefficients de la matrice A par le scalaire λ :

$$\lambda A = \Big(\lambda a_{i,j}\Big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$$

Remarques :

R 1 – On écrit λA mais on n'écrit pas $A\lambda$: le coefficient est toujours devant.

R 2 – Pour toute matrice A, on a $0A = 0$

R 3 – Pour toute matrice A, on a $1A = A$

R 4 – L'addition et la multiplication par un scalaire sont distributifs l'une sur l'autre :

$$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A, \qquad \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$$

Définition 5
Soient $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = \left(b_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
Soient λ et μ deux scalaires. Alors la matrice

$$\lambda A + \mu B = \left(\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$$

est appelée une **combinaison linéaire de A et B**.
Plus généralement, si $A_1, \dots, A_k$ sont k matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et si $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, alors la matrice $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_k A_k$ est une **combinaison linéaire** de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, i.e. une matrice obtenue par des sommes ou des multiplications par des scalaires.

1.3 Produit matriciel

Définition 6
Soient $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, i.e. le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.
On peut alors définir une **matrice produit** $C = AB = \left(c_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ avec

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,q]\!], \quad \boxed{c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}}$$

Exemples :

E 1 – $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

E 2 – $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$ IMPOSSIBLE

E 3 – $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

E 4 – $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

E 5 – $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax + by)$

E 6 – $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb \\ ya & yb \end{pmatrix}$

Remarques :

R 1 – Si le produit AB existe, le produit BA peut ne pas exister.

R 2 – Le produit matriciel **n'est pas commutatif.** Autrement dit, même si AB et BA existent, on n'a pas forcément $AB = BA$, de manière générale $\boxed{AB \neq BA}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

R 3 – Le produit matriciel est **associatif**. Si les produits ont bien un sens, on a :

$$(AB)C = A(BC) = ABC$$

R 4 – Le produit matriciel est distributif à droite et à gauche par rapport à l'addition :

$$A(B + C) = (AB) + (AC) \qquad (B + C)A = (BA) + (CA)$$

R 5 – Le produit matriciel possède un élément neutre qui est la matrice identité :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \qquad I_n A = AI_p = A$$

R 6 – On a pour toutes matrices A et B telles que AB existe, et pour tout scalaire λ

$$A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda\,(AB)$$

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a : $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.
On peut donc avoir $A \neq 0$ et $B \neq 0$ et avoir $AB = 0$ où 0 désigne la matrice nulle. On dit que **le produit matriciel n'est pas intègre**.
Par conséquent, il faudra faire attention : $AB = AC \quad \not\Longrightarrow B = C$

1.4 Cas des matrices carrées

Exemples :

E 1 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$A0_n = 0_n A = 0_n \qquad \text{et} \qquad AI_n = I_n A = A$$

E 2 – Un produit de matrices diagonales reste une matrice diagonale. Plus précisément, si $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $D' = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, alors $DD' = \operatorname{diag}(\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n) = D'D$.

E 3 – Un produit de matrices triangulaires supérieures reste une matrice triangulaire supérieure.

E 4 – Un produit de matrices triangulaires inférieure reste une matrice triangulaire inférieure.

Définition 7
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.
Alors on définit les puissances de la matrice A par :

$$A^0 = I_n \qquad , A^1 = A \qquad \text{et} \qquad \forall k \geqslant 1,\ A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k \text{ fois}} = A^{k-1}A = AA^{k-1}$$

Exemples :

E 1 – Si $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ alors pour tout entier naturel k : $D^k = \operatorname{diag}({\lambda_1}^k, \ldots, {\lambda_n}^k)$

E 2 – Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.
On en déduit que $\forall k \geqslant 3,\ A^k = 0$. On dit que la matrice A est **nilpotente d'ordre 3.**

Remarque :

ATTENTION. En général $\boxed{(AB)^k \neq A^k B^k}$. On a $(AB)^k = \underbrace{AB \times AB \times \cdots \times AB}_{k \text{ fois}}$

Définition 8
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que **les matrices A et B commmutent** si

$$AB = BA$$

Remarques :

R 1 – Si $AB = BA$, alors on a bien dans ce cas, $(AB)^k = A^k B^k$.
R 2 – La matrice identité d'ordre n, I_n commute avec toutes les matrices carrées d'ordre n.
R 3 – Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commute avec A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Théorème 9 ***Identité remarquable***
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices qui commutent (i.e. $AB = BA$). Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{A^k - B^k = (A-B)\sum_{j=0}^{k-1} A^j B^{k-1-j} = (A-B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + A^{k-3}B^2 + \cdots + AB^{k-2} + B^{k-1})}$$

Théorème 10 ***Formule du binôme de Newton***
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices qui commutent (i.e. $AB = BA$). Alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}}$$

Remarque :

Lorsqu'une matrice M peut s'écrire $M = I_n + N$ avec N nilpotente, la formule du Binôme s'écrit facilement pour M^n et beaucoup de termes sont nuls (car N^k est nul dès que k est supérieur à un indice donné).
Ex : pour A ci-dessus, on a :

$$(I_3 + A)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A^j = I_3 + nA + \frac{n(n-1)}{2}A^2 + 0$$

Définition 11 **Trace d'une matrice carrée**

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On appelle **trace de A** la somme des élements diagonaux de A.

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

Proposition 12

Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$tr(AB) = tr(BA)$$

1.5 Transposée d'une matrice

Définition 13

Soit $\left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On définit la **matrice transposée de A**, notée A^T, la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ où on échange (on tranpose) les lignes en colonnes de A et vice-versa : $A^T = \left(a_{j,i}\right)_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\1\leqslant i\leqslant n}}$.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarques :

- **R 1** – Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors : $(A^T)^T = A, (A+B)^T = A^T + B^T,\ (\lambda A)^T = \lambda A^T$.
- **R 2** – Si une matrice A est diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $A^T = A$.
- **R 3** – Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on a :

$$\boxed{(AB)^T = B^T\ A^T}$$

Définition 14

On dit qu'une matrice carrée A est **symétrique** lorsque $A^T = A$.
On dit qu'une matrice carrée A est **antisymétrique** lorsque $A^T = -A$.

Théorème 15

Toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

1.6 Matrices et systèmes linéaires

Définition 16
Soit un système linéaire à n équations et p inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases}$$

On peut **représenter ce système matriciellement** par une équation du type

$$AX = B$$

avec les notations suivantes :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & & a_{n,p} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

1.7 Matrices carrées inversibles

Définition 17
Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **inversible** s'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AB = BA = I_n$$

La matrice B est alors notée A^{-1} et s'appelle **l'inverse de A**.
L'ensemble des matrices inversibles de taille n est noté $GL_n(\mathbb{R})$ appelé le **groupe linéaire des matrices inversibles**.

Remarques :

- **R 1** – Si une matrice A est inversible, son inverse est unique.
- **R 2** – Si une matrice A est inversible à droite (il existe B_1 telle que $AB_1 = I_n$), alors elle est inversible à gauche (il existe C_1 telle que $C_1A = I_n$).
  De même, si une matrice est inversible à gauche, elle est inversible à droite également.

Exemples :

- **E 1** – Une matrice qui n'est pas carrée ne peut pas être inversible.
- **E 2** – La matrice I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.
- **E 3** – Lorsqu'on connaît une relation polynomiale sur la matrice A, on peut facilement voir si A est inversible.
  Exemple : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 3A - I_n = 0$. Alors, on a
  $$A^2 - 3A - I_n = 0 \iff A^2 - 3A = I_n \iff A(A - 3I_n) = I_n$$
  La matrice A est donc inversible à droite, donc inversible, et son inverse est $A^{-1} = A - 3I_n$.

Proposition 18

Soient A et B deux matrices de $GL_n(\mathbb{R})$ (i.e. inversibles).

1. *Pour toutes matrices M, N de même taille : $AM = AN \Longrightarrow M = N$.*
2. *A^{-1} est aussi inversible et on a : $(A^{-1})^{-1} = A$.*
3. *L'ensemble des matrices inversibles est* ***stable par produit****.*
   Le produit AB est aussi inversible et $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$.
   En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p est inversible et : $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p = A^{-p}$.
4. *Pour $\lambda \neq 0$, λA est inversible et on a : $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$*
5. *A est inversible si et seulement A^T est inversible, et dans ce cas, $\boxed{(A^T)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T}$.*

Définition 19

Pour une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on appelle **déterminant de A** la quantité $\boxed{\det(A) = ad - bc}$.

Proposition 20

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors : $\boxed{A \text{ inversible } \Longleftrightarrow \det(A) \neq 0}$ et on a :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Théorème 21

1. *Si A est triangulaire, alors A inversible $\Longleftrightarrow$ tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.*
2. *Si D est diagonale, alors D est inversible $\Longleftrightarrow$ tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.*
   Dans ce cas, si $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, alors $D^{-1} = diag\left(\dfrac{1}{\lambda_1}, \dfrac{1}{\lambda_2}, \ldots, \dfrac{1}{\lambda_n}\right)$

Théorème 22

Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si pour toute matrice $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le système

$$AX = Y$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est de Cramer :

$$A \in GL_n(\mathbb{R}) \iff \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \exists! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ /\ AX = Y$$

Dans ce cas, on a

$$\boxed{AX = Y \Longleftrightarrow X = A^{-1}Y}$$

La résolution du système $AX = Y$ permet de déterminer A^{-1}.

Définition 23
Lorsqu'on obtient une matrice B à partir d'une matrice A à l'aide d'une suite d'opérations élémentaires, on dit que **les matrices A et B sont équivalentes** et on note

$$A \sim B$$

Proposition 24
Si A et B sont deux matrices équivalentes, alors A est inversible si et seulement si B est inversible.

Remarque :

> Pour savoir si une matrice est inversible, on peut donc essayer de la changer à l'aide d'opérations élémentaires en une matrice plus simple pour vérifier l'inversibilité : les matrices triangulaires sont les exemples les plus simples.
> On applique donc la méthode du Pivot de Gauss, non plus sur le système, mais sur la matrice elle-même et on regarde si la matrice triangularisée obtenue possède une ligne/colonne nulle (cela revient à regarder si 2 lignes/colonnes de la matrice sont proportionnelles).
> **METHODE DE GAUSS-JORDAN**.
> Pour calculer explicitement l'inverse d'une matice inversible $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il suffit de la transformer en la matrice identité I_n à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes uniquement ou **sur les colonnes uniquement**.
> Si on répète exactement les mêmes opérations dans le même ordre en partant initialement de la matrice I_n, on obtiendra à la fin la matrice inverse A^{-1}.
>
> ATTENTION : la méthode ne marche que si on ne mélange pas les opérations lignes/colonnes.

Exemple :

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1}.

Puisqu'on fait les mêmes opérations sur les matrices A et I, on les écrit côte à côte et on applique les opérations élémentaires simultanément pour déterminer A^{-1}.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 3L_3 + 5L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

On peut conclure ici que la matrice A est inversible, puisqu'elle est équivalente à une matrice triangulaire sans zéro sur la diagonale.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ -3 & 6 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \qquad \begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

2 Applications linéaires $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$

2.1 Définition

Définition 25
On appelle **application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$** toute application qui conserve les combinaisons linéaires, autrement dit une fonction $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\boxed{\forall u, v \in \mathbb{R}^p,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)}$$

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 26
On appelle **isomorphisme** toute application linéaire qui est bijective.
On appelle **endomorphisme de $\mathbb{R}^n$** toute application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.
On appelle **automorphisme de $\mathbb{R}^n$** tout endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^n$.

Remarque :

Si pour une application linéaire f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, on connaît l'image d'une base (de la base canonique notamment), alors on peut retrouver l'image de tout vecteur de $\mathbb{R}^p$.

Exemples :

E 1 – $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est linéaire si et seulement s'il existe un réel a tel $f(x) = ax$

E 2 – si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ est linéaire et vérifie :

$$f(e_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f(e_3) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Alors, f est nécessairement l'application donnée par : f(x,y,z) = (x+2y,-x+2y+z, 2x+2z,-y+3z)

Définition 27
On appelle **forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$** toute application linéaire allant de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
Les formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ sont en fait les applications f qui s'écrivent sous la forme :

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n, \qquad \text{avec } a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Remarque :

Les applications de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ qui sont linéaires sont donc toujours de la forme :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \Big(\varphi_1(x_1, \ldots, x_p),\ \varphi_2(x_1, \ldots, x_p),\ \ldots,\ \varphi_n(x_1, \ldots, x_p)\Big)$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^p$.

2.2 Premiers résultats

Proposition 28
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors f envoie toujours le vecteur nul (de l'espace de départ) vers le vecteur nul de l'espace d'arrivée :

$$\boxed{f\left(0_{\mathbb{R}^p}\right) = 0_{\mathbb{R}^n}}$$

Proposition 29
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

- *Si G est un sev de $\mathbb{R}^p$, alors $f(G)$ est un sev de $\mathbb{R}^n$.*
- *Si H est un sev de $\mathbb{R}^n$, alors son image réciproque $f^{-1}(H)$ est un sev de $\mathbb{R}^p$.*

2.3 Noyau d'une application linéaire

Définition 30
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.
On appelle **noyau de f** l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^p$ qui ont pour image le vecteur nul :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in \mathbb{R}^p \ / \ f(x) = 0_{\mathbb{R}^n}\} = f^{-1}\Big(\ \{0_{\mathbb{R}^n}\}\ \Big)$$

Remarque :

> Pour tout vecteur x de l'ensemble de départ ($\mathbb{R}^p$), on a donc :
>
> $$x \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(x) = 0$$

Proposition 31
Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\ \mathbb{R}^n)$, alors Ker$(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ (ensemble de départ).

Théorème 32
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$. On a :

$$f \text{ est injective} \iff \mathit{Ker}(f) = \Big\{0_{\mathbb{R}^p}\Big\}$$

2.4 Image d'une application linéaire

Définition 33
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.
On appelle **image de f** l'ensemble des images des vecteurs de $\mathbb{R}^p$:

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\ x \in \mathbb{R}^p\} = f(\mathbb{R}^p) = \Big\{y \in \mathbb{R}^n \ / \ \exists x \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } y = f(x)\Big\}$$

Remarque :

> Pour tout vecteur x de l'ensemble d'arrivée ($\mathbb{R}^n$), on a donc :
>
> $$x \in \mathrm{Im}(f) \iff \exists z \in \mathbb{R}^p \ / \ x = f(z)$$

Proposition 34
Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\ \mathbb{R}^n)$, alors $Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (ensemble d'arrivée).
On appelle alors ***rang de f*** *la dimension de $Im(f)$:*

$$\boxed{rg(f) = \dim(Im(f))}$$

Proposition 35
Si on désigne par $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$, et si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, alors :

$$Im(f) = Vect\Big(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p)\Big)$$

Proposition 36
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors :

$$\boxed{Im(f) \subset Ker(f) \iff f^2 = 0.}$$

Proposition 37
Soient $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ deux applications linéaires. Alors :

$$\boxed{g \circ f = 0 \iff Im(f) \subset Ker(g)}$$

Proposition 38
Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire.
- *Si f est injective alors l'image par f d'une famille libre est une famille libre.*
- *Si f est surjective alors l'image par f d'une famille génératrice est une famille génératrice.*
- *Si f est bijective alors l'image par f d'une base est une base.*

2.5 Théorème du rang

Théorème 39 ***Théorème du rang***
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$. Alors :

$$\dim(Ker(f)) + rg(f) = p$$

Remarque :

> On pourra retenir que la somme des dimensions du noyau et de l'image donne toujours la dimension de l'espace de départ.

3 Matrice canoniquement associée à une application linéaire

3.1 Premiers résultats

Définition 40 **Matrice associée à une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$**

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ une application linéaire définie sur $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Il existe alors une liste de scalaires $a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}, a_{2,1}, \ldots, a_{2,n}, \ldots, a_{n,n}$ tels que :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{p-1} \\ x_p \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{1,j} x_j \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{2,j} x_j \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{n,j} x_j \end{pmatrix} \end{array}$$

On appelle alors **matrice canoniquement associée à f** la matrice A de n lignes et p colonnes donné par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i,j} \end{pmatrix}_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

Remarques :

R 1 – Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, la matrice A est donc un tableau de format (n, p), i.e. n lignes et p colonnes. Elle est donnée par la juxtaposition dans un ordre précis de p vecteurs (colonnes) de $\mathbb{R}^n$.

R 2 – À chaque application linéaire on associe une unique matrice canoniquement associée. Réciproquement, à chaque matrice de format (k, ℓ) on associe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^\ell$ vers $\mathbb{R}^k$.

Exemples :

E 1 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Alors, A correspond à la donnée de l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par : $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ x + z \end{pmatrix}$.

E 2 – Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Alors B a pour application canoniquement associée $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, donnée par : $g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y - z \\ 2x + z \\ -x + y + 3z \end{pmatrix}$.

E 3 – Soit h l'application de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par : $h(x, y) = \big(2x - y,\ x + y,\ x + 3y\big)$.
Alors h est l'application canoniquement associée à la matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Proposition 41
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une matrice, alors son application canoniquement associée est linéaire. Réciproquement, toute application linéaire est associée à une matrice.

Remarques :

- **R 1** – Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est l'application canoniquement associée à une matrice A, en notant $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$, les p colonnes de A représentent $f(e_1)$, $f(e_2)$, $\ldots$, $f(e_p)$.
- **R 2** – Réciproquement, si $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^p$, et si on fixe une liste $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ (et une unique matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$) qui vérifie : $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $f(e_k) = u_k$.

Combinaison linéaires d'applications linéaires

Proposition 42
Si f et g sont deux applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + g$ est encore une application linéaire et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^p,\ (\lambda f + g)(x) = \lambda f(x) + g(x)$$

Remarque :

En particulier si f et g désignent les applications linéaires associées à A et B, alors $A+B$ est la matrice associée à $f+g$ et λA est associée à λf.

Composition d'applications linéaires

Proposition 43
Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, et si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sont deux applications linéaires, de matrices canoniques respectives A et B, alors l'application composée $g \circ f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ est encore linéaire et sa matrice canonique associée est :

$$C = BA$$

Remarques :

- **R 1** – Le produit AB correspond à la composition $f \circ g$ si f est l'application associée à A et g est l'application associée à B.
- **R 2** – La matrice identité d'ordre k correspond en fait à **l'application identité de $\mathbb{R}^k$** : $\mathrm{Id} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\ u & \longmapsto & u \end{array}$.

3.2 Image, noyau et rang d'une matrice

Définition 44

Sur le même modèle que pour les applications linéaires, on définit donc pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

- le **noyau de la matrice A** :

$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 0\}$$

- l'**image de la matrice A** :

$$\mathrm{Im}(A) = Vect(C_1, C_2, \dots, C_p), \qquad \text{où : } C_1, C_2, \dots, C_p \text{ sont les colonnes de } A$$

  autrement dit $\mathrm{Im}(A) = \{AX, \ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$.
- le **rang de la matrice A** :

$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim(Vect(C_1, C_2, \dots, C_p))$$

Remarques :

R 1 – Les notions sont liées entre les applications linéaires et la matrice, en identifiant les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ et les vecteurs de $\mathbb{R}^k$.
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une matrice et $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ l'application associée :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f) \iff f\Big((x_1, x_2, \dots, x_p)\Big) = 0_{\mathbb{R}^n} \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$$

$$\mathrm{Im}(A) = Vect\,(C_1, C_2, \dots, C_p) = Vect\,(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)) = \mathrm{Im}(f)$$

et enfin : $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(f)$.

R 2 – Pour une application linéaire $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ ou une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a nécessairement

$$0 \leqslant \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M) \leqslant \min(p, n)$$

R 3 – Donner un élément du noyau de A (ou de f associée) traduit en fait une relation sur les colonnes de la matrice A :

$$(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathrm{Ker}(A) \iff x_1C_1 + x_2C_2 + \cdots + x_pC_p = 0$$

Chercher le noyau d'une matrice, revient donc en fait à chercher l'ensemble des relations linéaires nulles entre les colonnes.

R 4 – Pour une matrice A, on a : $\boxed{\mathrm{Ker}(A) = \{0\} \iff \text{ les colonnes de } A \text{ forment une famille libre}}$.

Théorème 45 ***Théorème du rang***

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\dim(Ker(A)) + rg(A) = p$$

3.3 Matrices carrées et endomorphismes

Définition 46

On appelle **endomorphisme de** $\mathbb{R}^n$ toute application linéaire f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.
On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

Remarques :

R 1 – Un endomorphisme a toujours pour matrice associée une matrice carrée, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

R 2 – L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant stable par somme, multiplication par un scalaire, et par produit matriciel, on peut donc dire que :
- une combinaison linéaire de deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ est encore un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
- une composition de deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ est encore un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Exemple :

La **Matrice carrée nulle** : $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ correspond à l'endomorphisme nul (qui associe à tout vecteur le vecteur nul).
On peut noter la matrice associée simplement « 0 »et l'endomorphisme nul « 0 »également. Si ambiguité, on écrit $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$.

Proposition 47

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme, de matrice associée A. Alors :

$$f \text{ bijectif} \iff A \text{ inversible}$$

Si f est bijectif, alors f^{-1} est encore une application linéaire, et la matrice de f^{-1} est exactement la matrice A^{-1}.