

CHAPITRE 9

Applications linéaires et matrices

”La vie d’un individu n’a rien de linéaire et pourtant son histoire est plus facile à raconter dans une apparente linéarité.” *D. Kennedy*

Prerequis

- Notions de vecteurs dans \mathbb{R}^n
- Notions de famille libre, famille liée, base.

Objectifs

- Définir des nouveaux ensembles : ceux des matrices
- Faire des calculs dans ces ensembles
- Définir une application linéaire entre 2 espaces vectoriels et sa matrice canoniquement associée

Exercices d’application

- Exercices 1, 2, 6 à 8, 12 à 15, 18, 20, 22, 24, 26, 29, 30 à 34 du TD9

1 L’ensemble des matrices

1.1 Définitions

Définition 1

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice à coefficients dans \mathbb{R} à n lignes et p colonnes** tout tableau A de taille $n \times p$ contenant des scalaires (des nombres réels) :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & & a_{n,p} \end{pmatrix} = \left(a_{i,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Exemple :

!

Remarque :

- Quand on note un terme de la matrice : $a_{i,j}$ ou $[A]_{i,j}$,
- le premier indice i désigne l'**indice ligne**
 - le second indice j désigne l'**indice colonne**

Définition 2

On note :

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes, p colonnes et à coefficients réels.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des **matrices carrées** à n lignes et n colonnes.
On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **carrée d'ordre n** .
- $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à une ligne et p colonnes.
On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ est une **matrice ligne**.
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et une colonne.
On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une **matrice colonne**.

Remarques :

- R1** – En pratique on peut "identifier" $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et \mathbb{R}^n .
- R2** – Deux matrices sont égales si elles vérifient :
 - elles ont le même nombre de lignes
 - elles ont le même nombre de colonnes
 - tous les coefficients pris deux à deux (sur la même ligne et la même colonne) sont égaux

Exemples :

- E1** – Une matrice carrée est dite **diagonale** si elle est carrée et si tous les termes qui ne sont pas situés sur la diagonale sont nuls :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} = \text{diag}(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n})$$

autrement dit, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonale si $\forall i \neq j, a_{i,j} = 0$.

- E2** – Une matrice carrée est dite **triangulaire supérieure** si tous les coefficients "en dessous" de la diagonale sont nuls, i.e. si $\forall i > j, a_{i,j} = 0$.
- E3** – Une matrice carrée est dite **triangulaire inférieure** si tous les coefficients "au-dessus" de la diagonale sont nuls, i.e. si $\forall i < j, a_{i,j} = 0$.
- E4** – CAS PARTICULIER : **Matrice nulle**.

$$0_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- E5** – CAS PARTICULIER : **matrice identité** (ou **matrice unité**) **d'ordre n** :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elle ne contient que des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

1.2 Premières opérations sur les matrices

Définition 3

Soient $A = \left(a_{i,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = \left(b_{i,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On définit alors **la matrice somme** $A + B$ comme la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ où on additionne deux à deux les termes correspondants aux mêmes lignes et colonnes.

$$A + B = \left(a_{i,j} + b_{i,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Exemple :

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & \sqrt{2} \\ -1 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Alors } A + B = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Remarques :

R1 – On ne peut pas calculer la somme de deux matrices n'ayant pas le même nombre de lignes ou le même nombre de colonnes

R2 – L'addition de matrices possède les propriétés suivantes :

- elle est **commutative** : $A + B = B + A$
- elle est **associative** : $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$
- elle possède un **élément neutre** : la matrice nulle. $A + 0 = 0 + A = A$
- chaque matrice possède un **opposé** qui est $-A = \left(-a_{i,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

Définition 4

Soit $A = \left(a_{i,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire.

On définit alors **la matrice** λA comme une matrice de même taille que A où on multiplie tous les coefficients de la matrice A par le scalaire λ :

$$\lambda A = \left(\lambda a_{i,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Remarques :

R1 – On écrit λA mais on n'écrit pas $A\lambda$: le coefficient (le scalaire) est toujours devant la matrice.

R2 – Pour toute matrice A , on a $0A = 0$

R3 – Pour toute matrice A , on a $1A = A$

R4 – L'addition et la multiplication par un scalaire sont distributifs l'une sur l'autre :

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

Définition 5

Soient $A = \left(a_{i,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = \left(b_{i,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Soient λ et μ deux scalaires. Alors la matrice

$$\lambda A + \mu B = \left(\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

est appelée une **combinaison linéaire de A et B**.

Plus généralement, si A_1, \dots, A_k sont k matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et si $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, alors la matrice $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k$ est une **combinaison linéaire** de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, i.e. une matrice obtenue par des sommes ou des multiplications par des scalaires.

1.3 Produit matriciel**Définition 6**

Soient $A = \left(a_{i,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = \left(a_{i,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, i.e. le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .

On peut alors définir une **matrice produit** $C = AB = \left(c_{i,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ avec

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$$

Exemples :

$$\mathbf{E1} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E2} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{IMPOSSIBLE}$$

$$\mathbf{E3} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E4} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E5} - \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax + by)$$

$$\mathbf{E6} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb \\ ya & yb \end{pmatrix}$$

Remarques :

R1 – Si le produit AB existe, le produit BA peut ne pas exister.

R2 – Le produit matriciel **n'est pas commutatif**. Autrement dit, même si AB et BA existent, on n'a

pas forcément $AB = BA$, de manière générale $\boxed{AB \neq BA}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

R3 – Le produit matriciel est **associatif**. Si les produits ont bien un sens, on a :

$$(AB)C = A(BC) = ABC$$

R4 – Le produit matriciel est distributif à droite et à gauche par rapport à l'addition :

$$A(B + C) = (AB) + (AC) \quad (B + C)A = (BA) + (CA)$$

R5 – Le produit matriciel possède un élément neutre qui est la matrice identité :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad I_n A = A I_p = A$$

R6 – On a pour toutes matrices A et B telles que AB existe, et pour tout scalaire λ

$$A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$$

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a : $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

On peut donc avoir $A \neq 0$ et $B \neq 0$ et avoir $AB = 0$ où 0 désigne la matrice nulle. On dit que **le produit matriciel n'est pas intègre**.

Par conséquent, il faudra faire attention : $AB = AC \not\Rightarrow B = C$

1.4 Cas des matrices carrées

Exemples :

E1 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$A0_n = 0_n A = 0_n \quad \text{et} \quad A I_n = I_n A = A$$

E2 – Un produit de matrices diagonales reste une matrice diagonale. Plus précisément, si $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $D' = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, alors $DD' = \text{diag}(\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_n) = D'D$.

E3 – Un produit de matrices triangulaires supérieures reste une matrice triangulaire supérieure.

E4 – Un produit de matrices triangulaires inférieure reste une matrice triangulaire inférieure.

Définition 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

Alors on définit les puissances de la matrice A par :

$$A^0 = I_n, \quad A^1 = A \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1, \quad A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ fois}} = A^{k-1}A = AA^{k-1}$$

Exemples :

E1 – Si $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alors pour tout entier naturel k : $D^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$

E2 – Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

On en déduit que $\forall k \geq 3, A^k = 0$. On dit que la matrice A est **nilpotente d'ordre 3**.

Remarque :

ATTENTION. En général $(AB)^k \neq A^k B^k$. On a $(AB)^k = \underbrace{AB \times AB \times \dots \times AB}_{k \text{ fois}}$

Définition 8

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que **les matrices A et B commutent** si

$$AB = BA$$

Remarques :

R1 – Si $AB = BA$, alors on a bien dans ce cas, $(AB)^k = A^k B^k$.

R2 – La matrice identité d'ordre n , I_n commute avec toutes les matrices carrées d'ordre n .

R3 – Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commute avec A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Théorème 9

Identité remarquable

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices qui commutent (i.e. $AB = BA$). Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$:

$$A^k - B^k = (A - B) \sum_{j=0}^{k-1} A^j B^{k-1-j} = (A - B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + A^{k-3}B^2 + \dots + AB^{k-2} + B^{k-1})$$

Théorème 10

Formule du binôme de Newton

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices qui commutent (i.e. $AB = BA$). Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Remarque :

Lorsqu'une matrice M peut s'écrire $M = I_n + N$ avec N nilpotente, la formule du Binôme s'écrit facilement pour M^n et beaucoup de termes sont nuls (car N^k est nul dès que k est supérieur à un indice donné).

Par exemple pour toute matrice A nilpotente d'ordre 3, on a :

$$(I_3 + A)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} A^j = I_3 + nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2 + 0$$

Définition 11**Trace d'une matrice carrée**

Soit A une matrice carrée d'ordre n . On appelle **trace de A** la somme des éléments diagonaux de A .

$$\text{tr}(A) = \sum_{k=1}^n a_{k,k}$$

Proposition 12

Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

1.5 Transposée d'une matrice**Définition 13**

Soit $\left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On définit la **matrice transposée de A** , notée A^T , la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$

où on échange (on tranpose) les lignes en colonnes de A et vice-versa : $A^T = \left(a_{j,i}\right)_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq n}}$.

Exemple :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarques :

R1 – Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors : $(A^T)^T = A$, $(A + B)^T = A^T + B^T$, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

R2 – Si une matrice A est diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $A^T = A$.

R3 – Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on a :

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Définition 14

On dit qu'une matrice carrée A est **symétrique** lorsque $A^T = A$.

On dit qu'une matrice carrée A est **antisymétrique** lorsque $A^T = -A$.

Théorème 15

Toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

1.6 Matrices et systèmes linéaires

Définition 16

Soit un système linéaire à n équations et p inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

On peut **représenter ce système matriciellement** par une équation du type

$$AX = B$$

avec les notations suivantes :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & & a_{n,p} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_B$$

Exemple :

Écrire le système suivant sous forme matricielle et le résoudre : $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 6x + 14y = 13 \end{cases}$
 (ENS 2020)

1.7 Matrices carrées inversibles

Définition 17

Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **inversible** s'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AB = BA = I_n$$

La matrice B est alors notée A^{-1} et s'appelle **l'inverse de A** .

L'ensemble des matrices inversibles de taille n est noté $GL_n(\mathbb{R})$ et appelé le **groupe linéaire des matrices inversibles**.

Remarques :

- R1** – Si une matrice A est inversible, alors son inverse est unique.
- R2** – Si une matrice A est inversible à droite (il existe B_1 telle que $AB_1 = I_n$), alors elle est inversible à gauche (il existe C_1 telle que $C_1A = I_n$).
De même, si une matrice est inversible à gauche, alors elle est inversible à droite également.

Exemples :

E1 – Une matrice qui n'est pas carrée ne peut pas être inversible.

E2 – La matrice I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.

E3 – Lorsqu'on connaît une relation polynomiale sur la matrice A , on peut facilement voir si A est inversible.

Exemple : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 3A - I_n = 0$. Alors, on a

$$A^2 - 3A - I_n = 0 \iff A^2 - 3A = I_n \iff A(A - 3I_n) = I_n$$

La matrice A est inversible à droite, donc inversible, et son inverse est $A^{-1} = A - 3I_n$.

Proposition 18

Soient A et B deux matrices de $GL_n(\mathbb{R})$ (i.e. inversibles).

1. Pour toutes matrices M, N de même taille : $AM = AN \implies M = N$.

2. A^{-1} est aussi inversible et on a : $(A^{-1})^{-1} = A$.

3. L'ensemble des matrices inversibles est **stable par produit**.

Le produit AB est aussi inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p est inversible et : $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p = A^{-p}$.

4. Pour $\lambda \neq 0$, λA est inversible et on a : $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

5. A est inversible si et seulement si A^T est inversible, et dans ce cas, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Définition 19

Pour une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on appelle **déterminant de A** la quantité $\det(A) = ad - bc$.

Proposition 20

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors : A inversible $\iff \det(A) \neq 0$ et on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Théorème 21

1. Si A est triangulaire, alors A inversible \iff tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

2. Si D est diagonale, alors D est inversible \iff tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Dans ce cas, si $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, alors $D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$

Théorème 22

Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si pour toute matrice $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le système

$$AX = Y$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est de Cramer :

$$A \in GL_n(\mathbb{R}) \iff \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / AX = Y$$

Dans ce cas, on a

$$AX = Y \iff X = A^{-1}Y$$

La résolution du système $AX = Y$ permet de déterminer A^{-1} .

Définition 23

Lorsqu'on obtient une matrice B à partir d'une matrice A à l'aide d'une suite d'opérations élémentaires, on dit que **les matrices A et B sont équivalentes** et on note

$$A \sim B$$

Proposition 24

Si A et B sont deux matrices équivalentes, alors A est inversible si et seulement si B est inversible.

Remarque :

Pour savoir si une matrice est inversible, on peut donc essayer de la changer à l'aide d'opérations élémentaires en une matrice plus simple pour vérifier l'inversibilité : les matrices triangulaires sont les exemples les plus simples.

On applique donc la méthode du Pivot de Gauss, non plus sur le système, mais sur la matrice elle-même et on regarde si la matrice triangularisée obtenue possède une ligne/colonne nulle (cela revient à regarder si 2 lignes/colonnes de la matrice sont proportionnelles).

METHODE DE GAUSS-JORDAN.

Pour calculer explicitement l'inverse d'une matrice inversible $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il suffit de la transformer en la matrice identité I_n à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes uniquement ou **sur les colonnes uniquement**.

Si on répète exactement les mêmes opérations dans le même ordre en partant initialement de la matrice I_n , on obtiendra à la fin la matrice inverse A^{-1} .

ATTENTION : la méthode ne marche que si on ne mélange pas les opérations lignes/colonnes.

Exemple :

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1} .

Puisqu'on fait les mêmes opérations sur les matrices A et I , on les écrit côte à côte et on applique les opérations élémentaires simultanément pour déterminer A^{-1} .

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow 3L_3 + 5L_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

On peut conclure ici que la matrice A est inversible, puisqu'elle est équivalente à une matrice triangulaire sans zéro sur la diagonale.

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ -3 & 6 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 & \begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ainsi, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

2 Applications linéaires $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$

2.1 Définition

Définition 25

On appelle **application linéaire de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n** toute application qui conserve les combinaisons linéaires, autrement dit une fonction $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^p, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$$

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications linéaires de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n .

Définition 26

On appelle **isomorphisme** toute application linéaire qui est bijective.

On appelle **endomorphisme de \mathbb{R}^n** toute application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n .

On appelle **automorphisme de \mathbb{R}^n** tout endomorphisme bijectif de \mathbb{R}^n .

Remarque :

Si pour une application linéaire f de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n , on connaît l'image d'une base (de la base canonique notamment), alors on peut retrouver l'image de tout vecteur de \mathbb{R}^p .

Exemples :

E1 – $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire si et seulement s'il existe un réel a tel $f(x) = ax$

E2 – si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ est linéaire et vérifie :

$$f(e_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f(e_3) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Alors, f est nécessairement l'application donnée par :

$$f(x, y, z) = (x + 2y, -x + 2y + z, 2x + 2z, -y + 3z)$$

Définition 27

On appelle **forme linéaire sur \mathbb{R}^n** toute application linéaire allant de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

Les formes linéaires sur \mathbb{R}^n sont en fait les applications f qui s'écrivent sous la forme :

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n, \quad \text{avec } a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Remarque :

Les applications de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n qui sont linéaires sont donc toujours de la forme :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p) = \left(\varphi_1(x_1, \dots, x_p), \varphi_2(x_1, \dots, x_p), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_p) \right)$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sont des formes linéaires sur \mathbb{R}^p .

2.2 Premiers résultats

Proposition 28

Soit f une application linéaire de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n . Alors f envoie toujours le vecteur nul (de l'espace de départ) vers le vecteur nul de l'espace d'arrivée :

$$f(0_{\mathbb{R}^p}) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

Proposition 29

Soit f une application linéaire de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n .

- Si G est un sev de \mathbb{R}^p , alors $f(G)$ est un sev de \mathbb{R}^n .
- Si H est un sev de \mathbb{R}^n , alors son image réciproque $f^{-1}(H)$ est un sev de \mathbb{R}^p .

2.3 Noyau d'une application linéaire

Définition 30

Soit f une application linéaire de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n .

On appelle **noyau de f** l'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^p qui ont pour image le vecteur nul :

$$\text{Ker}(f) = \{x \in \mathbb{R}^p / f(x) = 0_{\mathbb{R}^n}\} = f^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^n}\})$$

Remarque :

Pour tout vecteur x de l'ensemble de départ (\mathbb{R}^p), on a donc :

$$x \in \text{Ker}(f) \iff f(x) = 0$$

Exemple :

Donner le noyau de l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie dans l'exemple 2 p. 12

Proposition 31

Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, alors $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^p (ensemble de départ).

Théorème 32

Soit f une application linéaire de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n . On a :

$$f \text{ est injective} \iff \text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^p}\}$$

2.4 Image d'une application linéaire

Définition 33

Soit f une application linéaire de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n .

On appelle **image de f** l'ensemble des images des vecteurs de \mathbb{R}^p :

$$\text{Im}(f) = \{f(x), x \in \mathbb{R}^p\} = f(\mathbb{R}^p) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n / \exists x \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } y = f(x) \right\}$$

Remarque :

Pour tout vecteur x de l'ensemble d'arrivée (\mathbb{R}^n), on a donc :

$$x \in \text{Im}(f) \iff \exists z \in \mathbb{R}^p / x = f(z)$$

Proposition 34

Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, alors $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n (ensemble d'arrivée).

On appelle alors **rang de f** la dimension de $\text{Im}(f)$:

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$$

Proposition 35

Si on désigne par (e_1, e_2, \dots, e_p) la base canonique de \mathbb{R}^p , et si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, alors :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}\left(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)\right)$$

Exemple :

Déterminer l'image de l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie dans l'exemple 2 p. 12

Proposition 36

Soient $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ deux applications linéaires. Alors :

$$g \circ f = 0 \iff \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$$

Conséquences 37

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^p . Alors :

$$\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f) \iff f^2 = 0.$$

Proposition 38

Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire.

- Si f est injective alors l'image par f d'une famille libre est une famille libre.
- Si f est surjective alors l'image par f d'une famille génératrice est une famille génératrice.
- Si f est bijective alors l'image par f d'une base est une base.

2.5 Théorème du rang

Théorème 39

Théorème du rang

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$. Alors :

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f) = p$$

Remarque :

On pourra retenir que la somme des dimensions du noyau et de l'image donne toujours la dimension de l'espace de départ.

Exemple :

Appliquer le théorème du rang à l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie dans l'exemple 2 p. 12

3 Matrice canoniquement associée à une application linéaire

3.1 Premiers résultats

Définition 40

Matrice associée à une application linéaire de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ une application linéaire définie sur \mathbb{R}^p à valeurs dans \mathbb{R}^n . Il existe alors une liste de scalaires $a_{1,1}, \dots, a_{1,n}, a_{2,1}, \dots, a_{2,n}, \dots, a_{n,1}, \dots, a_{n,n}$ tels que :

$$f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^p \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{p-1} \\ x_p \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n \\ \sum_{j=1}^p a_{1,j}x_j \\ \sum_{j=1}^p a_{2,j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p a_{n,j}x_j \end{pmatrix}$$

On appelle alors **matrice canoniquement associée à f** la matrice A de n lignes et p colonnes donné par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \left(a_{i,j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Remarques :

- R1** – Si $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, la matrice A est donc un tableau de format (n, p) , i.e. n lignes et p colonnes. Elle est donnée par la juxtaposition dans un ordre précis de p vecteurs (colonnes) de \mathbb{R}^n .
- R2** – À chaque application linéaire on associe une unique matrice canoniquement associée. Réciproquement, à chaque matrice de format (k, ℓ) on associe une unique application linéaire de \mathbb{R}^ℓ vers \mathbb{R}^k .

Exemples :

E1 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Alors, A correspond à la donnée de l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par : $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ x + z \end{pmatrix}$.

E2 – Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Alors B a pour application canoniquement associée $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, donnée par : $g(x, y, z) = \begin{pmatrix} y - z \\ 2x + z \\ -x + y + 3z \end{pmatrix}$.

E3 – Soit h l'application de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par : $h(x, y) = (2x - y, x + y, x + 3y)$. Alors h est l'application canoniquement associée à la matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

E4 – Donner la matrice canoniquement associée à l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie dans l'exemple 2 p. 12

Proposition 41

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une matrice, alors son application canoniquement associée est linéaire. Réciproquement, toute application linéaire est associée à une matrice.

Remarques :

R1 – Si $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ est l'application canoniquement associée à une matrice A , en notant (e_1, e_2, \dots, e_p) la base canonique de \mathbb{R}^p , les p colonnes de A représentent $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)$.

R2 – Réciproquement, si (e_1, e_2, \dots, e_p) désigne la base canonique de \mathbb{R}^p , et si on fixe une liste (u_1, u_2, \dots, u_p) de p vecteurs de \mathbb{R}^n , alors il existe une unique application linéaire f de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n (et une unique matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$) qui vérifie : $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(e_k) = u_k$.

Combinaison linéaires d'applications linéaires**Proposition 42**

Si f et g sont deux applications linéaires de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n , et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + g$ est encore une application linéaire et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, (\lambda f + g)(x) = \lambda f(x) + g(x)$$

Remarque :

En particulier si f et g désignent les applications linéaires associées à A et B , alors $A + B$ est la matrice associée à $f + g$ et λA est associée à λf .

Composition d'applications linéaires

Proposition 43

Si $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, et si $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont deux applications linéaires, de matrices canoniques respectives A et B , alors l'application composée $g \circ f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ est encore linéaire et sa matrice canonique associée est :

$$C = BA$$

Remarques :

R1 – Le produit AB correspond à la composition $f \circ g$ si f est l'application associée à A et g est l'application associée à B .

R2 – La matrice identité d'ordre k correspond en fait à l'**application identité de \mathbb{R}^k** : $\text{Id} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$
 $u \mapsto u$.

3.2 Image, noyau et rang d'une matrice

Définition 44

Sur le même modèle que pour les applications linéaires, on définit donc pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

- le **noyau de la matrice A** :

$$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) / AX = 0\}$$

- l'**image de la matrice A** :

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_p), \quad \text{où : } C_1, C_2, \dots, C_p \text{ sont les colonnes de } A$$

autrement dit $\text{Im}(A) = \{AX, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$.

- le **rang de la matrice A** :

$$\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A)) = \dim(\text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_p))$$

Remarques :

R1 – Les notions sont liées entre les applications linéaires et la matrice, en identifiant les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ et les vecteurs de \mathbb{R}^k .

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une matrice et $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application associée :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f) \iff f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}\right) = 0_{\mathbb{R}^n} \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A)$$

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_p) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)) = \text{Im}(f)$$

et enfin : $\text{rg}(M) = \text{rg}(f)$.

R2 – Pour une application linéaire $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ ou une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a nécessairement

$$0 \leq \text{rg}(f) = \text{rg}(M) \leq \min(p, n)$$

R3 – Donner un élément du noyau de A (ou de f associée) traduit en fait une relation sur les colonnes de la matrice A :

$$(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \text{Ker}(A) \iff x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_p C_p = 0$$

Chercher le noyau d'une matrice, revient donc en fait à chercher l'ensemble des relations linéaires nulles entre les colonnes.

R4 – Pour une matrice A , on a : $\boxed{\text{Ker}(A) = \{0\} \iff \text{les colonnes de } A \text{ forment une famille libre}}$.

Théorème 45

Théorème du rang

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\dim(\text{Ker}(A)) + \text{rg}(A) = p$$

3.3 Matrices carrées et endomorphismes

Définition 46

On appelle **endomorphisme de \mathbb{R}^n** toute application linéaire f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n .
On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des endomorphismes de \mathbb{R}^n .

Remarques :

- R1** – Un endomorphisme a toujours pour matrice associée une matrice carrée, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- R2** – L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant stable par somme, multiplication par un scalaire, et par produit matriciel, on peut donc dire que :
- une combinaison linéaire de deux endomorphismes de \mathbb{R}^n est encore un endomorphisme de \mathbb{R}^n .
 - une composition de deux endomorphismes de \mathbb{R}^n est encore un endomorphisme de \mathbb{R}^n .

Exemple :

La **Matrice carrée nulle** : $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ correspond à l'endomorphisme nul (qui

associe à tout vecteur le vecteur nul).

On peut noter la matrice associée simplement $\ll 0 \gg$ et l'endomorphisme nul $\ll 0 \gg$ également. Si ambiguïté, on écrit $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$.

Proposition 47

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme, de matrice associée A . Alors :

$$f \text{ bijectif} \iff A \text{ inversible}$$

Si f est bijectif, alors f^{-1} est encore une application linéaire, et la matrice de f^{-1} est exactement la matrice A^{-1} .

Exemple :

L'application $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie dans l'exemple 2 p. 16 est-elle bijective ? Si oui, déterminer g^{-1} .