CHAPITRE 8

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

"En mathématiques, [si] on ne comprend pas les choses, on s'y habitue." *J. Von Neumann*

1 Compléments sur les ensembles

1.1 Les ensembles

Définition 1 **Ensemble mathématique**

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p$ des objets mathématiques. On forme l'**ensemble** $E = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$.
On dit alors que chaque u_i (pour $1 \leqslant i \leqslant p$) est **un élément** de l'ensemble E, ou autrement dit que u_i appartient à E et on écrit « $u_i \in E$ ».

Remarque :

Deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments. L'ordre des éléments n'est pas important. Ainsi, les ensembles :

$$\{1, 2\}, \qquad \{2, 1\}, \qquad \{1, 1, 2, 2, 2\}$$

sont en réalité le même ensemble au sens mathématique.

Définition 2 **Cardinal d'un ensemble**

Le nombre d'éléments distincts d'un ensemble E est appelé le **cardinal** de E, on le note $Card(E)$.
Un ensemble est **fini** si son cardinal est un entier naturel, i.e. s'il possède un nombre fini d'éléments. Dans le cas contraire, on dit qu'il est **infini**.

Exemples :

- **E 1** – L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est un ensemble de cardinal 0.
- **E 2** – L'ensemble $\{\emptyset\}$ n'est pas vide : il contient un objet (l'ensemble vide).
- **E 3** – L'ensemble $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ est de cardinal 4.
- **E 4** – Pour tous entiers naturels m et n, si $m \leqslant n$, on note : $[\![m, n]\!] = \{m, m+1, m+2, \ldots, n-1, n\}$.

Définition 3 **Produit cartésien d'ensembles**

Soient E et F deux ensembles.
On appelle **produit cartésien** $E \times F$ l'ensemble des couples (x, y), où $x \in E$ et $y \in F$.

$$E \times F = \{(x, y), \quad x \in E,\ y \in F\}$$

Plus généralement, si $E_1, E_2, \ldots, E_k$ désignent k ensembles, on définit le produit cartésien comme l'ensemble des listes possibles d'éléments dans les E_i :

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k), \quad x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_k \in E_k\}$$

Exemples :

- **E 1** – Quand on note « $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ » cela signifie que $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{N}$.
- **E 2** – Pour écrire qu'une phrase est vraie pour tout réel x et tout entier n, on peut donc écrire soit « $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \ldots$ » ou bien « $\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}, \ldots$ ».
- **E 3** – Mathématiquement, un **ensemble** est noté avec des accolades. Comme on l'a dit précédemment, il n'y a pas d'ordre dans un ensemble.
- **E 4** – Lorsqu'on manipule une **liste** $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ (avec des parenthèses), les éléments sont ordonnés. La liste $(1, 2, 3)$ est différente de la liste $(2, 3, 1)$ mathématiquement.

1.2 Parties d'un ensemble

Définition 4 **Inclusion entre deux ensembles**

Soient E et F deux ensembles. On dit que **F est inclus dans E** et on écrit « $F \subset E$ »si tout élément de l'ensemble F est aussi un élément de l'ensemble E, i.e.

$$\boxed{F \subset E \iff \forall x \in F,\ x \in E}$$

Lorsque $F \subset E$, on dit que F est une **partie** ou un **sous-ensemble** de E.

Exemples :

- **E 1** – Parmi les ensembles usuels, on a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- **E 2** – Lorsqu'on a un ensemble E, il est courant de considérer un sous-ensemble F des éléments de E vérifiant une certaine propriété : $E = \mathbb{R}, \quad F = \{x \in E \ /\ x^2 - 5x + 4 < 0\}$.
  Par exemple, on note $\boxed{\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\}}$, $\boxed{\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0\}}$, $\boxed{\mathbb{R}^*_+ = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}}$.
  Par convention, si un ensemble est décrit avec une condition, l'ensemble contient le premier objet écrit dans l'ensemble.
  $$\{x \in \mathbb{R} \ /\ x^2 - 1 = 0\} \neq \{x^2 - 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$$

Remarque :

Pour montrer qu'un ensemble est inclus dans un autre, on raisonne avec une implication :

$$F \subset E \iff \boxed{\text{si}}\ x \in F,\ \boxed{\text{alors}}\ x \in E$$

Proposition 5 ***Propriétés des inclusions***

Soient E, F et G trois ensembles. Alors

1. $\emptyset \subset E$ *et* $E \subset E$.
2. ***Transitivité*** *: si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.*
3. ***Double inclusion*** *:*

$$\boxed{E = F \qquad \Longleftrightarrow \qquad E \subset F \text{ et } F \subset E}$$

Remarque :

Pour montrer que deux ensembles sont égaux, on raisonne donc avec une double inclusion ou une équivalence ou une double implication :

$$\begin{aligned} E = F \iff & \left(\; x \in E \iff x \in F \right) \\ \iff & \begin{cases} \text{si } x \in E, \text{ alors } x \in F \\ \text{si } x \in F, \text{ alors } x \in E \end{cases} \end{aligned}$$

Définition 6 **Ensemble des parties de E**

Pour tout ensemble E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble formé par toutes les parties de E.

Remarque :

$\mathcal{P}(E)$ est un ensemble dont chaque élément est un ensemble.

1.3 Intersection et union d'ensembles

Définition 7 **Intersection et union**

Soient E et F deux ensembles.

- On appelle **intersection de E et F**, notée $E \cap F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent simultanément à E et à F.
- On appelle **union de E et F**, notée $E \cup F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à E ou à F, i.e. à au moins un des deux ensembles.

Deux ensembles E et F vérifiant $E \cap F = \emptyset$ sont dits **disjoints**.

Proposition 8 ***Propriétés de $\cap$ et $\cup$***

La relation d'intersection est :

— ***commutative*** : $A \cap B = B \cap A$
— ***associative*** : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
— *vérifie* $A \cap A = A$ *et* $A \cap \emptyset = \emptyset$

La relation de réunion est :

— ***commutative*** : $A \cup B = B \cup A$
— ***associative*** : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
— *vérifie* $A \cup A = A$ *et* $A \cup \emptyset = A$

L'intersection et la réunion vérifient :

— ***la distributivité de $\cap$ sur $\cup$*** : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
— ***la distributivité de $\cup$ sur $\cap$*** : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Remarque :

Pour tous ensembles A et B, on a : $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset B \subset A \cup B$

.

2 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

2.1 Opérations sur les vecteurs

Définition 9 **L'espace $\mathbb{R}^n$**

Soit $n \geqslant 1$. On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets de réels.

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\Big\}$$

Dans ce cas particulier de produit cartésien, on pourra noter également les n-uplets en colonnes, appelés alors des **vecteurs**, l'ensemble $\mathbb{R}^n$ étant appelé **espace vectoriel** :

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Remarques :

- **R 1** – Géométriquement, $\mathbb{R}$ peut être représenté comme une droite graduée.
- **R 2** – Géométriquement, $\mathbb{R}^2$ peut être représenté par un plan, les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sont alors des segments orientés par une flèche reliant par exemple l'origine au point de coordonnées (x, y).
- **R 3** – Géométriquement, $\mathbb{R}^3$ peut être représenté par un espace dirigé par trois axes.
- **R 4** – Un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est donc une « flèche », mobile, par exemple pouvant être placée en l'origine, avec une direction précise, un sens précis, et une longueur précise.

Définition 10 **Opérations sur les vecteurs**

On définit sur les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ deux **opérations** :

- une **addition** notée $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\text{Si } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ et } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ \text{alors : } u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}.$$

- une **multiplication externe par des scalaires** notée $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\text{Si } \lambda \in \mathbb{R},\ \text{et } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, alors \quad \lambda \cdot u = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}$$

Remarques :

- **R 1** – Les « coefficients »réels peuvent donc multiplier les vecteurs, et sont appelés ici les **scalaires**.
- **R 2** – On note $0_{\mathbb{R}^n}$ (ou tout simplement 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté) le **vecteur nul** de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles : $0 = 0_{\mathbb{R}^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 11 ***Propriétés des opérations + et ·***

Soit $n \geqslant 1$. Dans $\mathbb{R}^n$, les opérations + et · ont les propriétés suivantes :

- *L'addition est **commutative** :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad x + y = y + x$$

- *L'addition est **associative** :*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \qquad (x + y) + z = x + (y + z)$$

- *La multiplication vérifie la propriété suivante :*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$$

- *Chaque vecteur possède un **opposé** pour la loi +*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x + (-1) \cdot x = 0$$

  On note plus simplement $-x$ le vecteur $(-1) \cdot x$.
- *Les lois sont **distributives** l'une sur l'autre.*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad (\lambda + \mu) \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y + \mu \cdot x + \mu \cdot y$$

2.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 12 **Combinaisons linéaires**

Soit $n \geqslant 1$. Soient $u_1, \ldots, u_k$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On appelle **combinaison linéaire de** $u_1, \ldots, u_k$ tout vecteur de la forme :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k, \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$$

On note alors **Vect**$(u_1, \ldots, u_k)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui contient toutes les combinaisons linéaires possibles de $u_1, u_2, \ldots, u_k$.

$$\boxed{\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k) = \left\{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\right\}}$$

Remarques :

R 1 – Le vecteur nul est une combinaison linéaire de toute liste de vecteurs (il suffit de choisir tous les λ_k nuls) .

R 2 – Si au moins un des vecteurs u_j est non nul, alors $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$ contient une infinité de vecteurs.

Définition 13 **Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$**

On appelle **sous-espace vectoriel de** $\mathbb{R}^n$ tout ensemble F qui vérifie :

- $F \subset \mathbb{R}^n$
- $F \neq \emptyset$
- F est stable par combinaison linéaire : $\forall x, y \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda x + y \in F$ aussi.

Remarques :

R 1 – Si $u_1, \ldots, u_k$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors l'ensemble $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ puisqu'il est stable par combinaison linéaire par définition.
C'est le **sous-espace vectoriel engendré par** $u_1, \ldots, u_k$.

R 2 – On montrera plus tard que réciproquement, tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ peut être vu comme un sous-espace vectoriel engendré, donc mis sous la forme d'un Vect.

R 3 – Si un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est stable par combinaison linéaire, alors il doit nécessairement contenir le vecteur nul.
En particulier, tout ensemble qui ne contient pas le vecteur nul ne peut pas être un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

R 4 – $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, c'est le plus grand possible dans $\mathbb{R}^n$.

R 5 – $\{0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, c'est le plus petit possible dans $\mathbb{R}^n$.

Exemple :

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - 2z = 0 \right\}$.

<u>Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.</u>

- Méthode 1 : vérifier la définition (ensemble non vide stable par combinaison linéaire).
  - ⋆ Le vecteur nul $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient bien à F, donc $F \neq \emptyset$.
  - ⋆ Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in F$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in F$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
    On sait que $u_1 + u_2 - 2u_3 = 0$ (car $u \in F$) et $v_1 + v_2 - 2v_3 = 0$ (car $v \in F$).
    On a $\lambda u + v = \begin{pmatrix} \lambda u_1 + v_1 \\ \lambda u_2 + v_2 \\ \lambda u_3 + v_3 \end{pmatrix}$.
    et $(\lambda u_1 + v_1) + (\lambda u_2 + v_2) - 2(\lambda u_3 + v_3) = \lambda(u_1 + u_2 - 2u_3) + (v_1 + v_2 - 2v_3) = 0$, donc $\lambda u + v \in F$.

  Ainsi, F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- Méthode 2 : voir F comme un sous-espace vectoriel engendré.

$$\begin{aligned}
F &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - 2z = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{avec } y, z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } y, z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

  Ainsi, F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$: c'est celui engendré par $u = (-1, 1, 0)$ et $v = (2, 0, 1)$.

Proposition 14 ***Classification des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$***

Soit F un sous-espace vectoriel du plan $\mathbb{R}^2$ non réduit à $\{0\}$.
Alors F contient au moins un vecteur non nul u et deux cas sont possibles :

- *Si tous les éléments de F sont proportionnels à u, alors :*

$$F = Vect(u)$$

  *F est la **droite vectorielle** engendrée par le vecteur u.*
- *Sinon il existe au moins un vecteur dans F non proportionnel à u, et alors*

$$F = \mathbb{R}^2$$

  *F est le **plan vectoriel** $\mathbb{R}^2$ tout entier.*

Remarque :

On a donc uniquement trois types de sous-espaces vectoriels dans $\mathbb{R}^2$:
- L'ensemble $\{0\}$ réduit à un point.
- Les droites passant par l'origine.
- Le plan $\mathbb{R}^2$.

Proposition 15 ***Equation/Paramétrisation d'une droite***

Soit D une droite vectorielle dans $\mathbb{R}^2$ de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

- *On connaît D par une **paramétrisation** :*

$$v \in D \Longleftrightarrow v \in Vect(u) \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}\ , v = \lambda u \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}\ , v = \begin{pmatrix} \lambda\alpha \\ \lambda\beta \end{pmatrix}$$

  La connaissance de $v \in D$ dépend donc d'un paramètre λ (scalaire).
- *On connaît aussi D par une **équation cartésienne**. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$, $(a,b) \neq (0,0)$ tels que :*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \Longleftrightarrow a\,x + by = 0$$

  En particulier, avec les notations précédentes, $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ appartient à D, donc $D = Vect\left(\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\right)$.

Remarque :

Plus généralement si D est une droite affine dans $\mathbb{R}^2$,
- Soit D est donnée par une équation cartésienne, du type :

$$ax + by + c = 0 \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R}, (a,b) \neq (0,0)$$

  alors D est dirigée par le vecteur $u = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, mais ne passe par l'origine que si $c = 0$.
- Soit D peut être vue comme la donnée d'un point et d'une droite vectorielle. On obtient alors une paramétrisation des éléments de D. Par exemple, la droite D passant par le point $A = (x_A, y_A)$ et dirigée par $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ est donnée par :

$$M \in D \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}\ /\ M = A + \lambda u = \begin{pmatrix} x_A + \lambda u_1 \\ y_A + \lambda u_2 \end{pmatrix}$$

Proposition 16 ***Hyperplans dans $\mathbb{R}^n$***

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels fixés non tous nuls. Alors l'ensemble

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \ / \ a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, appelé un ***hyperplan de $\mathbb{R}^n$****.*

Exemples :

E 1 – Dans $\mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2x - y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
En particulier :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ / \ y = 2x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

E 2 – Dans $\mathbb{R}^3$, $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + 2z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
En particulier :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} -y-2z \\ y \\ z \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

E 3 – Plus généralement dans $\mathbb{R}^n$, tout ensemble donné par une équation cartésienne homogène (les coordonnées vérifient une équation linéaire nulle (non triviale)) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, qu'on peut exprimer comme un sous-espace vectoriel engendré par $n - 1$ vecteurs.

Proposition 17 ***Intersection de sous-espaces vectoriels***

Soit $n \geqslant 1$. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, alors $F \cap G$ est encore un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Remarque :

En particulier, une intersection d'hyperplans est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y - t = 0 \quad \text{et} \quad 2x + z + t = 0 \right\}$$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

En particulier, remarquons que :

$$\begin{cases} x + y - t = 0 \\ 2x + z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x + t \\ z = -2x - t \end{cases}$$

donc :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x+t \\ -2x-t \\ t \end{pmatrix}, x, t \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

3 Systèmes linéaires

3.1 Équations et systèmes linéaires

Définition 18
Une **équation linéaire** à p inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$ est une équation du type

$$a_1x_1 + \cdots + a_px_p = b$$

avec $a_1, a_2, \ldots, a_p, b$ des éléments fixés de $\mathbb{R}$.

Un **système linéaire** de n équations linéaires à p inconnues est constitué de n équations du type précédent. On le note habituellement de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

Autrement dit, on note a_{ij} le coefficient de l'inconnue x_j dans la i-ième équation.

Remarques :

R 1 – **Résoudre** un système de n équations à p inconnues revient à déterminer tous les p-uplets $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, autrement dit les vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$, dont les coordonnées vérifient simultanément les n équations du système.

R 2 – Quand on donne les solutions d'un système, il est très important de donner le n-uplet dans le « bon ordre ». Par exemple, pour le système suivant d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{array}\right.$$

le couple $(2, 1)$ est solution, mais pas le couple $(1, 2)$. On a : $\mathcal{S} = \{(2, 1)\}$.

Proposition 19
*Si un système à n équations et p inconnues est **homogène** (le second membre est toujours nul, autrement dit $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$), alors l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.*

Définition 20
Un système est **incompatible** s'il n'admet aucune solution.
Un système est appelé un **système de Cramer** s'il admet exactement une solution.

Remarque :

Un système homogène ne peut jamais être incompatible. L'ensemble des solutions étant un sous-espace vectoriel, il contient toujours au moins le vecteur nul.

Exemples :

E 1 – Le système d'équations : $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=3 \end{cases}$ est incompatible.

E 2 – Le système d'équations : $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x+2y=4 \end{cases}$ n'admet qu'une solution : le couple $(2,1)$. C'est donc un système de Cramer.

E 3 – Un système homogène de Cramer a pour unique solution le vecteur nul. $\mathcal{S}=\{(0,\ldots,0)\}$.

E 4 – Il existe des systèmes admettant une infinité de solutions. Par exemple : $\begin{cases} 2x-y=2 \\ -4x+2y=-4 \end{cases}$.
En effet, ici, les deux équations sont proportionnelles, donc équivalentes. On peut seulement exprimer y en fonction de x (ou le contraire) :

$$y=2x-2$$

et donc

$$\mathcal{S}=\{(x,2x-2),\ x\in\mathbb{R}\}$$

Définition 21
Un système linéaire est **triangulaire** s'il est de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & \cdots & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & \cdots & \cdots & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & a_{nn}x_n & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

Chaque équation contient (au moins) une inconnue en moins que la précédente.

Remarque :

La formule du système triangulaire dépend en fait de p et n (on a choisit p>n ci-dessus), mais dans tous les cas un système triangulaire est un système facile à résoudre.

Exemples :

E 1 – <u>Si $n=p$.</u>

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & - & y & + & 3z & = & -5 \\ & & 5y & + & z & = & 8 \\ & & & & -2z & = & 4 \end{array}\right.$$

Il suffit de « remonter »le système pour obtenir les valeurs des inconnues l'une après l'autre : $z=-2$, donc $5y=8-z=10$, d'où $y=2$, puis $2x=-5+y-3z=3$, donc $x=\frac{3}{2}$. On obtient une solution unique :

$$\mathcal{S}=\{(\frac{3}{2},5,-2)\}.$$

Remarque :

<u>Lorsqu'on a un système triangulaire carré ($n=p$) sans zéro sur la « diagonale », alors c'est un système de Cramer.</u>

E 2 – Si $n > p$.
C'est encore plus simple puisque les dernières équations ont un membre de gauche nul. Soit le membre de droite est également nul et on peut oublier l'équation, soit ce n'est pas le cas et le système est incompatible, par exemple :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -5 \\ 5y + z = 8 \\ -2z = 4 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

E 3 – Si $n < p$
Le système triangulaire aura nécessairement une infinité de solutions qu'on va pouvoir exprimer en fonction des dernières inconnues en remontant le système comme dans les autres cas :

$$\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ y + 2z = 4 \end{cases}$$

À l'aide de la deuxième équation, on obtient $y = 4 - 2z$, puis $x = -2 + 2y - z = 6 - 5z$, soit

$$\mathcal{S} = \{(6 - 5z, 4 - 2z, z),\ z \in \mathbb{R}\}$$

3.2 Résolution des systèmes par opérations

Définition 22 **Systèmes équivalents**
Deux systèmes linéaires sont **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.

Définition 23 **Opérations élémentaires**
Les **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système linéaire sont de trois types :
- on peut échanger des lignes i et j : $\boxed{L_i \longleftrightarrow L_j}$
- on peut multiplier une ligne par un réel non nul : $\boxed{L_i \longleftarrow aL_i, \qquad (a \neq 0)}$
- on peut rajouter à une ligne autant de fois qu'on veut une autre ligne : $\boxed{L_i \longleftarrow L_i + bL_j, \qquad (b \in \mathbb{R})}$

Remarque :
On combine souvent les deux derniers types d'opérations élémentaires pour faire des opérations du type

$$\boxed{L_i \longleftarrow aL_i + bL_j \text{ avec } a \neq 0}$$

Proposition 24
Les opérations élémentaires sur les lignes transforment un système linéaire en un système équivalent

Proposition 25 ***Méthode du Pivot de Gauss***
On peut toujours transformer un système linéaire quelconque en un système triangulaire en procédant de la façon suivante :
- *Si besoin, on échange la ligne L_1 avec une ligne L_i sur laquelle le coefficient a_{i1} est non nul.*
- *À l'aide de combinaisons du type $L_i \longleftarrow aL_i + bL_1$, on annule tous les coefficients a_{i1} pour $i \geqslant 2$.*
- *On recommence sur le sous-système formé des $n-1$ dernières lignes (il ne contient plus que $p-1$ inconnues).*

Exemples :

E 1 –

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{2x} & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & = & -3 \\ x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} \boxed{2x} & - & y & + & 3z & = & 1 & \\ & - & \boxed{3y} & - & z & = & -7 & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ & & 3y & - & z & = & 5 & L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} \boxed{2x} & - & y & + & 3z & = & 1 & \\ & - & \boxed{3y} & - & z & = & -7 & \\ & & & - & \boxed{2z} & = & -2 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}\right.$$

En remontant le système, on obtient $z = 1$, puis $-3y - 1 = -7$, donc $y = 2$. Puis $2x - 2 + 3 = 1$, donc $x = 0$. Le système a donc une unique solution : $\mathcal{S} = \{(0, 2, 1)\}$.

E 2 – Parfois le système dépend d'un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$. Selon les valeurs de α, le système peut admettre une infinité, une seule ou aucune solution.
ATTENTION : on n'utilise jamais α pour multiplier une ligne (car on ne sait pas si $\alpha = 0$ ou non).

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{x} & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & (2-\alpha)y & + & \alpha z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & 2z & = & \alpha - 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} \boxed{x} & + & y & + & z & = & 0 & \\ & - & \alpha y & + & (\alpha-2)z & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & - & 4y & - & 4z & = & \alpha - 1 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} \boxed{x} & + & y & + & z & = & 0 & \\ & - & \boxed{4y} & - & 4z & = & \alpha - 1 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ & - & \alpha y & + & (\alpha-2)z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} \boxed{x} & + & y & + & z & = & 0 & \\ & - & \boxed{4y} & - & 4z & = & \alpha - 1 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ & & & & 8(\alpha-1)z & = & -\alpha(\alpha-1) & L_3 \leftarrow 4L_3 - \alpha L_2 \end{array}\right.$$

- Si $\alpha = 1$, on obtient : $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ -4y - 4z = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -z \end{array}\right.$.

  Il y a une infinité de solutions : $\mathcal{S} = \{(0, -z, z), z \in \mathbb{R}\}$.
- Si $\alpha \neq 1$, on obtient : $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ -4y - 4z = \alpha - 1 \\ z = -\frac{\alpha}{8} \end{array}\right.$ et le système est de Cramer et admet une unique solution : $\mathcal{S} = \left\{\left(\dfrac{\alpha - 1}{4}, \dfrac{-\alpha + 2}{8}, -\dfrac{\alpha}{8}\right)\right\}$.

Remarque :

Si un système dépend d'un paramètre, on peut être amener à le résoudre en fonction du paramètre et raisonner par disjonction de cas selon la valeur de ce paramètre.

4 Familles de vecteurs

4.1 Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel

Définition 26 **Famille génératrice d'un sev**

Soit $E = \mathbb{R}^n$. Rappelons que si $u_1, \ldots, u_k$ désignent k vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on note :

$$F = \text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j, \text{ avec } \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}$$

le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(u_1, \ldots, u_k)$, autrement dit l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $u_1, u_2, \ldots, u_k$.
On dit alors que la famille de vecteurs $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ est **génératrice** du sous-espace vectoriel F.

Remarques :

R 1 – Plus généralement, si F désigne un sous-espace vectoriel quelconque de $\mathbb{R}^n$, une famille de vecteurs $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ est dite génératrice de F si et seulement si : $F = \text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$.
Autrement dit si $u_1, u_2, \ldots, u_k \in F$, et si réciproquement tout vecteur de F peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $u_1, u_2, \ldots, u_k$.

R 2 – Donner une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel consiste donc simplement à le mettre sous la forme d'un Vect.

Exemple :

Donner une famille génératrice de $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + 3y - 4z = 0 \right\}$.

Remarquons que $2x + 3y - 4z = 0 \iff z = \frac{2x+3y}{4}$, donc :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y \end{pmatrix}, \ x, y \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3/4 \end{pmatrix} \right)$$

Proposition 27 ***Propriétés familles génératrices***

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, et soient $u_1, u_2, \ldots, u_k, v$ des vecteurs de F.

- *Dans une famille génératrice de F, on peut réaliser des opérations élémentaires sur les vecteurs sans changer le caractère générateur de la famille, autrement dit :*
  - ⋆ *on peut permuter les vecteurs (l'ordre des vecteurs n'est pas important)*
  - ⋆ *on peut multiplier un vecteur quelconque par un scalaire non nul*
  - ⋆ *on peut ajouter à un vecteur une combinaison linéaire des autres.*
- *Si une famille de vecteurs est génératrice, toute sur-famille (i.e. en rajoutant un ou plusieurs autres vecteurs) est encore génératrice.*

$$Si \quad F = Vect(u_1, u_2, \ldots, u_k), \quad alors \ F = Vect(u_1, u_2, \ldots, u_k, v)$$

- *Si une famille de vecteurs est génératrice, et si un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres, alors la famille obtenue en retirant ce vecteur est encore génératrice.*

$$Si \ F = Vect(u_1, \ldots, u_{k-1}, u_k) \quad et \ u_k \in Vect(u_1, \ldots, u_{k-1}), \quad alors \ F = Vect(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1})$$

Exemple :

Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

La famille (u, v, w) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Autrement dit, peut-on écrire tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ comme une combinaison linéaire de u, v et w ?

Soit $D = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. On résout :

$$D = xu + yv + zw \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} x + z &= a \\ x + y &= b \\ -x + y - z &= c \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = -a + b - c \\ y = a + c \\ z = 2a - b + c \end{cases}$$

Le système admet au moins une solution, donc on a bien $D \in Vect(u, v, w)$.

Ainsi la famille (u, v, w) est bien génératrice de $\mathbb{R}^3$

4.2 Familles libres, familles liées

Définition 28

Soit $n \geqslant 1$ et soient $u_1, u_2, \dots, u_k$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

- On dit que $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ est **une famille libre** de vecteurs si la seule combinaison linéaire nulle de $u_1, u_2, \dots, u_k$ est la combinaison triviale nulle :

$$\boxed{\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}, \qquad \text{si } \lambda_1 v_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k = 0_{\mathbb{R}^n}, \qquad \text{alors } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0}$$

- On dit que la famille $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ est une **famille liée** de vecteurs si elle n'est pas libre, autrement dit s'il existe une relation linéaire nulle non triviale entre les u_j :

$$\boxed{\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}, \text{ non tous nuls, tels que : } \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k = 0_{\mathbb{R}^n}}$$

Exemple :

Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. La famille (u, v, w) est-elle libre ?

On cherche s'il existe une relation linéaire nulle mais non triviale entre u, v, w.

$$au + bv + cw = 0 \iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - b + 3c = 0 \\ -a - 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2c \\ b = c \end{cases}$$

Il existe des solutions non nulles : par exemple $(a, b, c) = (-2, 1, 1)$ convient.

On a $-2u + v + w = 0$, donc la famille (u, v, w) est liée.

Remarques :

R 1 – Quand on a uniquement <u>un</u> vecteur u dans la famille, (u) libre $\iff u \neq 0$.

R 2 – Quand on a <u>deux</u> vecteurs u et v dans la famille

$$(u,v) \text{ libre } \iff u \text{ et } v \text{ sont non colinéaires}$$

$$(u,v) \text{ liée } \iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \ / \ v = \alpha u \text{ ou } u = \alpha v$$

R 3 – Dès qu'on a au moins 3 vecteurs dans la famille, voir si la famille est libre est un peu plus compliqué que de regarder la non-colinéarité.

Proposition 29 ***Propriétés familles libres/liées***

Soit $n \geqslant 1$ et soient $u_1, u_2, \ldots, u_k, v$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

- *Dans une famille libre de F, on peut réaliser des opérations élémentaires sur les vecteurs sans changer le caractère libre de la famille, autrement dit :*
  - ⋆ *on peut permuter les vecteurs (l'ordre des vecteurs n'est pas important)*
  - ⋆ *on peut multiplier un vecteur quelconque par un scalaire non nul*
  - ⋆ *on peut ajouter à un vecteur une combinaison linéaire des autres.*

- *Si la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ est liée, alors la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_k, v)$ est encore liée. Autrement dit, toute sur-famille d'une famille liée est encore liée.*
- *Si la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, u_k)$ est libre, alors la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1})$ est encore libre. Autrement dit, toute sous-famille d'une famille libre est encore libre.*

- *Toute famille contenant le vecteur nul est forcément liée.*
- *Une famille est liée si et seulement si un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.*
- *Une famille est libre si et seulement si aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire des autres.*

Proposition 30 ***Écriture unique dans une famille libre***

Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ une famille libre dans $\mathbb{R}^n$. Alors, toute écriture dans $Vect(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ est unique. Autrement dit, si un vecteur x s'écrit :

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j = \sum_{j=1}^{k} \mu_j u_j \quad \textit{avec } \lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{R}$$

alors $\lambda_1 = \mu_1$, et $\lambda_2 = \mu_2$, ..., et $\lambda_k = \mu_k$.

Proposition 31 ***Ajouter un vecteur à une famille libre***

Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ une famille libre dans $\mathbb{R}^n$.

- *Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$(u_1, u_2, \ldots, u_k, x) \textit{ liée } \iff x \textit{ est combinaison linéaire de } u_1, u_2, \ldots, u_k$$

- *Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$(u_1, u_2, \ldots, u_k, x) \textit{ libre } \iff x \notin Vect(u_1, u_2, \ldots, u_k)$$

4.3 Bases et dimension d'un sous-espace vectoriel

Définition 32
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, et soient $u_1, u_2, \ldots, u_k$ des vecteurs de F.
On dit que la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ **est une base de F** si une des conditions suivantes équivalentes est vérifiée :

(i) $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ est libre et génératrice de F.

(ii) $F = Vect(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ avec $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ libre.

(iii) $\forall x \in F$, il existe un unique k-uplet $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ tel que $x = \sum_{i=1}^{k} x_i u_i$.

Les scalaires $x_1, x_2, \ldots, x_k$ s'appellent les **coordonnées du vecteur x** dans la base $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ de F.

Remarque :

> Si on permute l'ordre des éléments dans une base (ou si on fait des opérations élémentaires), on a encore une base, mais les coordonnées sont modifiées. On prendra donc garde à l'ordre des éléments de la base.

Définition 33
Dans $\mathbb{R}^n$, on note e_i le vecteur où toutes les composantes sont nulles, sauf la i-ième qui vaut 1 :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors, la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée la **base canonique de $\mathbb{R}^n$**.

Proposition 34
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
Supposons que F admette une famille génératrice $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ de cardinal k.
Alors :

- *Toute famille libre dans F de k éléments est une base de F.*
- *Toute famille dans F d'au moins $(k+1)$ vecteurs est liée.*
- *Toute famille libre dans F a au maximum k éléments.*

Conséquence 35
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Alors toutes les bases de F ont le même nombre d'éléments.

Définition 36
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

- Si $F = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, on dit que la **dimension de F** est nulle et on écrit $\dim(F) = 0$.
- Si $F \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, on appelle alors **dimension de F**, notée $\dim(F)$, le nombre d'éléments dans une base (quelconque) de F.

Proposition 37

Pour tout $n \geqslant 1$, la dimension de $\mathbb{R}^n$ est n.

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$

Remarque :

> Pour tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ qui sont non triviaux (différents de $\mathbb{R}^n$ ou $\{0\}$), pour obtenir la dimension, il suffit donc de déterminer une base et de regarder le cardinal de cette base.

Proposition 38

Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension d, alors :
- *Si $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ est libre dans F, alors $k \leqslant d$.*
- *Si $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ est génératrice de F, alors $k \geqslant d$.*

Remarque :

> On voit donc qu'une base est une famille libre maximale, et aussi une famille génératrice minimale.

Proposition 39

Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ <u>de dimension d</u>.
Si on a une famille $(u_1, u_2, \ldots, u_d)$ qui contient <u>d vecteurs de F</u>, alors :

$$(u_1, u_2, \ldots, u_d) \text{ est génératrice de } F \Longleftrightarrow (u_1, u_2, \ldots, u_d) \text{ est libre}$$

Remarque :

> Ainsi, pour montrer qu'une famille est une base d'un sev F de dimension d, on peut soit :
> - montrer qu'elle est libre et génératrice de F
> - montrer qu'elle est libre et de cardinal d.
> - montrer qu'elle est génératrice de F et de cardinal d.

Théorème 40 — ***Théorème de la base incomplète***

Soit $n \geqslant 1$. Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ une famille libre dans un ev E de dimension n (nécessairement $k \leqslant n$).
Alors il existe des vecteurs $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n$ dans E tels que :

$$(u_1, u_2, \ldots, u_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n) \quad \text{soit une base de } E$$

Conséquence 41 — ***Dimension d'un sous-espace vectoriel***

Dans $\mathbb{R}^n$, tous les sous-espaces vectoriels (sauf $\{0\}$) admettent une base.
Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors $0 \leqslant \dim(F) \leqslant n$.
Enfin, le seul sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension n est $\mathbb{R}^n$.

Remarques :

> **R 1** – Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension 1, F est une **droite vectorielle**.
>
> **R 2** – Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension 2, F est un **plan vectoriel**.
>
> **R 3** – Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$, F est un **hyperplan vectoriel**.

5 Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels

5.1 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 42
Soit $n \geqslant 1$ et soient F, G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
On définit **la somme** $F + G$

$$\boxed{F + G = \{x + y, \quad x \in F, \ y \in G\}}$$

Alors $F + G$ est encore un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Remarques :

R 1 – Si on connaît deux familles génératrices (ou des bases) de F et G, alors on obtient une famille génératrice de $F + G$ en concaténant les deux familles génératrices de F et G.
Par exemple :

$$F = Vect(x, y) \quad \text{et} \quad G = Vect(u, v, w) \qquad \Longrightarrow \qquad F + G = Vect(x, y, u, v, w)$$

R 2 – Plus généralement, si A et B sont deux familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $Vect(A \cup B) = Vect(A) + Vect(B)$

Proposition 43 ***Propriétés des sommes***
Soit $n \geqslant 1$ et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. On a :
- $F + G = G + F$
- $F + F = F$
- $\{0\} + F = F$
- $F + \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$
- $F \subset (F + G)$ *et* $G \subset (F + G)$.
- $F = F + G \Longleftrightarrow G \subset F$.

Exemple :

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ x + y + z = 0 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ x - y + 2z = 0 \right\}$.
Déterminons $F + G$.

On sait que F est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, donc $\dim(F) = 2$. (On peut même déterminer explicitement une base de F).
On a $F \subset F + G$, donc $\dim(F + G) \geqslant \dim(F)$. Ainsi, $2 \leqslant \dim(F + G) \leqslant 3$.
Si on avait $\dim(F + G) = 2$, on aurait $F \subset F + G$ et $\dim(F) = \dim(F + G)$, donc $F = F + G$, donc $G \subset F$.
Or, c'est absurde, il y a des vecteurs de G qui ne sont pas dans F, par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Donc nécessairement, $\dim(F + G) = 3$, avec $F + G \subset \mathbb{R}^3$, donc $F + G = \mathbb{R}^3$.

5.2 Sommes directes

Définition 44
Soit $n \geqslant 1$ et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
On dit que $F + G$ est une **somme directe** si toute décomposition d'un vecteur en somme d'éléments de F et G est unique :

$$\forall u \in F + G,\ \exists!(x, y) \in F \times G \ / \ u = x + y$$

La somme $F + G$ est alors notée $\boxed{F \oplus G}$ pour montrer le caractère direct.

Proposition 45
Soit $n \geqslant 1$ et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) La somme $F + G = F \oplus G$ est directe, autrement dit :

$$\forall u \in F + G,\ \exists!(x, y) \in F \times G \ / \ u = x + y$$

(ii) Le vecteur nul se décompose de manière unique dans $F + G$:

$$\text{Si } x + y = 0_{\mathbb{R}^n} \text{ avec } x \in F \text{ et } y \in G, \text{ alors } x = 0_{\mathbb{R}^n} \text{ et } y = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

(iii) $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

Remarque :

On retiendra notamment l'équivalence entre (i) et (iii) :

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont en somme directe} \quad \Longleftrightarrow \quad F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^n}\}}$$

Proposition 46
Soit $n \geqslant 1$ et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F et soit $(e_{p+1}, \ldots, e_q)$ une base de G. Alors :

$$F + G = F \oplus G \Longleftrightarrow (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_q) \text{ est une base de } F + G$$

Remarques :

R 1 – Ainsi, la somme $F + G$ est directe si et seulement si, en concaténant une base de F et une base de G, on obtient une base de $F + G$.

R 2 – En fait, plus généralement, la somme $F + G$ est directe si et seulement si, en concaténant n'importe quelle famille libre de F et n'importe quelle famille libre de G, on obtient encore une famille libre.

Définition 47
Soit $n \geqslant 1$. On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G sont **supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$** si :

$$\mathbb{R}^n = F \oplus G$$

ou autrement dit

$$\mathbb{R}^n = F + G \quad \text{et} \quad F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$$

Remarques :

- **R 1** – Plus généralement, on peut définir un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel dans un autre.
  Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et si G_1 et G_2 sont deux sous-espaces vectoriels de F, G_1 et G_2 sont supplémentaires dans F si $F = G_1 \oplus G_2$.
- **R 2** – Dans $\mathbb{R}^n$, tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.
- **R 3** – Tout sev G d'un sev F admet un supplémentaire dans F.

Proposition 48 ***Formule de Grassmann***

Soit $n \geqslant 1$ et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

- *Si F et G sont en somme directe, alors*

$$\boxed{\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)}$$

- *Dans le cas général, on a la* ***Formule de Grassmann*** *:*

$$\boxed{\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)}$$

Remarques :

- **R 1** – Si F admet un supplémentaire G dans $\mathbb{R}^n$, on a alors :

$$\dim(F) + \dim(G) = n$$

5.3 Projections d'un vecteur sur une décomposition en supplémentaires

Définition 49

Soit $n \geqslant 1$, et soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbb{R}^n = F \oplus G$$

En particulier, tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ s'écrit, de manière unique, comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad x = x_1 + x_2 \quad \text{avec } x_1 \in F, x_2 \in G, \ x_1, x_2 \text{ uniques}}$$

Le vecteur x_1 est alors appelé le **projeté de x sur F parallèlement à G.**
Le vecteur x_2 est alors appelé le **projeté de x sur G parallèlement à F.**

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^3$, posons $F = \{(x, y, z) \ / \ x + y + z = 0\}$ et $G = Vect((1, 1, 1))$. Alors :

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus G$$

(car $F \cap G = \{0\}$ clairement, $\dim(F) = 2$, $\dim(G) = 1$, donc $\dim(F \oplus G) = 3$).

Si u est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$, par exemple $u = (u_1, u_2, u_3)$, alors :

$$u = \underbrace{\left(\frac{2u_1 - u_2 - u_3}{3}, \frac{-u_1 + 2u_2 - u_3}{3}, \frac{-u_1 - u_2 + 2u_3}{3}\right)}_{\in F} + \underbrace{\left(\frac{u_1 + u_2 + u_3}{3}, \frac{u_1 + u_2 + u_3}{3}, \frac{u_1 + u_2 + u_3}{3}\right)}_{\in G}$$