CHAPITRE 7

Intégration

"L'essence des mathématiques, c'est la liberté." *Cantor*

1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

1.1 Définition et propriétés géométriques

Définition 1 **Intégrale sur un segment**

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ $(a \leqslant b)$.

On appelle **intégrale de f sur le segment** $[a, b]$ l'aire algébrique de la surface définie entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. On note alors cette quantité :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{ou} \quad \int_a^b f$$

Remarques :

- **R 1** – La courbe pouvant être parfois au-dessus ou parfois en-dessous de l'axe des abscisses, on compte positivement dans le calcul de l'intégrale les aires situées au-dessus de l'axe des abscisses, et négativement dans le calcul de l'intégrale les aires situées en-dessous de l'axe des abscisses.
- **R 2** – Si $a = b$, alors la surface située sous la courbe est réduite à un trait, donc son aire est considérée comme nulle.
- **R 3** – Cette définition est dite « informelle », car pas très rigoureuse (peut-on bien toujours définir l'aire ?). Mais cette définition a l'avantage de permettre l'interprétation géométrique de la notion et donne une bonne intuition des résultats.

Proposition 2 ***Propriétés de l'intégrale***

Soient a, b deux réels tels que $a \leqslant b$. Soient f et g des fonctions continues sur $[a, b]$.

1. ***Linéarité de l'intégrale.***
   Si α, β sont deux réels, alors :
$$\int_a^b \Big(\alpha f(t) + \beta g(t)\Big)\, dt = \alpha \int_a^b f(t)\, dt + \beta \int_a^b g(t)\, dt$$
2. ***Relation de Chasles.***
   Si c est un réel tel que $a \leqslant c \leqslant b$, alors :
$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt$$
3. ***Positivité de l'intégrale.***
$$\text{Si} \quad \forall t \in [a, b],\ f(t) \geqslant 0, \qquad \text{alors} \qquad \int_a^b f(t)\, dt \geqslant 0$$
$$\text{Si} \quad \forall t \in [a, b],\ f(t) \leqslant 0, \qquad \text{alors} \qquad \int_a^b f(t)\, dt \leqslant 0$$
   et plus généralement,
$$\text{Si} \quad \forall t \in [a, b],\ f(t) \leqslant g(t), \qquad \text{alors} \qquad \int_a^b f(t)\, dt \leqslant \int_a^b g(t)\, dt.$$
4. ***Inégalité triangulaire.***
$$|\int_a^b f(t)\, dt| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

Définition 3 **Valeur moyenne d'une fonction**

Si $a < b$ et si f est une fonction continue sur $[a, b]$, on appelle **valeur moyenne de f sur $[a, b]$** la quantité définie par :
$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Proposition 4 ***Inégalités de la moyenne***

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ (avec $a < b$) et soient deux réels m et M.
$$\text{Si} \quad \forall t \in [a, b],\ m \leqslant f(t) \leqslant M, \qquad \text{alors} \quad m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant M(b-a)$$
$$\text{autrement dit} \quad m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt \leqslant M$$

En particulier, la fonction f étant continue sur $[a, b]$, elle est bornée et atteint ses bornes. Elle admet donc un minimum et un maximum sur $[a, b]$ pour lesquels on a :
$$\Big(\min_{[a,b]} f\Big)(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant \Big(\max_{[a,b]} f\Big)(b-a)$$

1.2 Intégrale et primitives

Définition 5 — **Primitives d'une fonction**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit qu'une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est une **primitive de f sur I** si la fonction F est dérivable sur I et si :

$$\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$$

Exemples :

E 1 – La fonction $F : x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction ln.

E 2 – La fonction $G : x \mapsto \ln(|x|)$ est une primitive sur $\mathbb{R}^*$ de la fonction $x \mapsto 1/x$.

Remarque :

On peut sans souci généraliser la définition de primitive à une fonction définie sur une réunion d'intervalles. Une primitive de f est alors une fonction F définie sur cette réunion d'intervalles telle que, sur chaque intervalle, F soit dérivable et $F' = f$.

Proposition 6 — ***Les primitives diffèrent d'une constante***

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si on suppose que f admet deux primitives F et G sur l'intervalle I, alors F et G diffèrent d'une constante additive :

$$\exists k \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in I,\ F(x) = G(x) + k$$

Remarque :

En particulier, si une fonction f admet une primitive, elle en admet alors une infinité (si on ajoute une constante, cela devient une autre primitive). On parlera donc toujours sans autre précision de <u>une</u> primitive de f (et non <u>la</u> primitive de f).

Proposition 7 — ***L'intégrale fonction de sa borne supérieure***

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, avec $a < b$.
On note pour tout $x \in [a, b]$,

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

*qu'on peut appeler **l'intégrale fonction de sa borne supérieure**.*
*La fonction φ est une primitive de f, c'est précisément **la seule primitive de f qui s'annule en a**.*

Remarque :

Si f est une fonction positive, il est clair que la fonction φ est croissante sur $[a, b]$ en interprétant en terme d'aires. On retrouve donc bien que si une fonction est positive sur un intervalle, alors ses primitives sont croissantes sur l'intervalle.

Théorème 8 — ***Théorème fondamental de l'analyse***

Toute fonction continue sur un intervalle admet toujours au moins une primitive sur cet intervalle.

Conséquence 9
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ (avec $a \leqslant b$).
En notant F une primitive quelconque de f sur $[a,b]$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt \quad = \quad F(b)-F(a) \quad \overset{notée}{=} \quad \Big[F(t)\Big]_a^b$$

Remarques :

R 1 – En particulier, cette définition ne dépend pas de la primitive F choisie.

R 2 – On retrouve ainsi que, lorsque $a=b$, on a bien $\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

R 3 – Cette définition permet d'étendre aussi la définition d'intégrale au cas où $b<a$. On a donc :

$$\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$$

Intuitivement, si on fait une intégrale de a à b, avec $b<a$, on compte l'aire « à l'envers », donc on compte tout négativement.

R 4 – La linéarité reste donc vraie pour toute intégrale (si $a<b$ ou $a>b$).

$$\int_a^b \Big(\alpha f(t)+\beta g(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \alpha\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Il suffit que f et g soient continues sur $[a,b]$ (ou $[b,a]$)

R 5 – La relation de Chasles reste vraie même si c est en dehors de l'intervalle $[a,b]$, tant que f est bien continue sur tous les segments considérés :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

R 6 – Pour la positivité de l'intégrale et la croissance de l'intégrale, il est essentiel de considérer les bornes dans le bon sens. Sinon cela changerait le sens de l'inégalité.

$$\text{si } b<a \text{ (mauvais sens)} \qquad \text{et si } \forall t\in[b,a],\ f(t)\leqslant g(t) \qquad \text{alors} \quad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

2 Calcul d'intégrales

2.1 Calcul de primitives

Remarques :

R 1 – Pour déterminer une primitive d'une fonction, il suffit de lire à l'envers le tableau de dérivation.

R 2 – Attention : la fonction $t\mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc admet bien une primitive sur $\mathbb{R}^*$, cela ne peut pas être la fonction ln (qui n'est définie que sur $]0,+\infty[$), c'est en fait la fonction $t\mapsto \ln(|t|)$, qui elle est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

R 3 – La fonction ln admet elle aussi une primitive sur $]0,+\infty[$.

$f(x)$	$F(x)$ ($+k \in \mathbb{R}$)	Domaine de validité
1	x	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2$	$\mathbb{R}$
x^2	$\frac{1}{3}x^3$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
x^n $(n \in \mathbb{Z}, n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$ $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ si $n < 0, n \neq -1$
x^α $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$
$\frac{1}{x+a}$	$\ln\lvert x+a\rvert$	$]-a, +\infty[$ ou $]-\infty, -a[$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
e^{ax}, $(a \neq 0)$	$\frac{1}{a}e^{ax}$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctan}(x)$	$\mathbb{R}$

$f(x)$	$F(x)$ ($+k \in \mathbb{R}$)
$u'(x)g'(u(x))$	$g(u(x))$
$u'(x)u(x)$	$\frac{1}{2}(u(x))^2$
$\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$	$-\dfrac{1}{u(x)}$
$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\sqrt{u(x)}$
$u'(x)(u(x))^n$ $(n \in \mathbb{Z}, n \neq -1)$	$\dfrac{1}{n+1}(u(x))^{n+1}$
$u'(x)(u(x))^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1)$	$\dfrac{1}{\alpha+1}(u(x))^{\alpha+1}$

$f(x)$	$F(x)$ ($+k \in \mathbb{R}$)
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin(u(x))$
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos(u(x))$
$u'(x)(1+\tan^2(u(x)))$	$\tan(u(x))$
$\dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$	$\mathrm{Arctan}(u(x))$

2.2 Intégration par parties

Théorème 10 ***Intégration par parties***

Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$, alors :

$$\boxed{\int_a^b u'(t)v(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt}$$

Exemples :

E 1 – Calculons $\displaystyle\int_0^2 te^{-t}dt$.

On pose : $\forall t \in [0,2]$, $\left| \begin{array}{l} u(t) = t \\ v'(t) = e^{-t} \end{array} \right.$, $\left| \begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} \end{array} \right.$.

Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,2]$, donc on peut intégrer par parties :

$$\int_0^2 te^{-t}dt = \Big[t(-e^{-t})\Big]_0^2 - \int_0^2 1(-e^{-t})dt = -2e^{-2} + \int_0^2 e^{-t}dt = -2e^{-2} + \Big[-e^{-t}\Big]_0^2 = 1 - 3e^{-2}$$

E 2 – Calculons $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{t^2}dt$.

On pose : $\forall t \in [1,2]$, $\left| \begin{array}{l} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = \dfrac{1}{t^2} \end{array} \right.$, $\left| \begin{array}{l} u'(t) = \dfrac{1}{t} \\ v(t) = -\dfrac{1}{t} \end{array} \right.$.

Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$, donc on peut intégrer par parties :

$$\int_1^2 \frac{\ln(t)}{t^2}dt = \Big[-\frac{\ln(t)}{t}\Big]_1^2 - \int_1^2 (-\frac{1}{t^2})dt = -\frac{\ln(2)}{2} - \Big[\frac{1}{t}\Big]_1^2 = -\frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2}$$

2.3 Changement de variable

Théorème 11
Soit f une fonction continue sur I et soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et à valeurs dans I. Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

Remarques :

R 1 – Un changement de variable peut se faire "dans les deux sens", il sera indiqué dans l'énoncé.

R 2 – Si on part d'une intégrale $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ et qu'on demande un changement de variable $\boxed{u=\varphi(x)}$ alors $du = \varphi'(x)dx$ et la variable x est celle qui apparaît déjà dans l'intégrale, donc on essaie d'écrire "$g(x)dx$" sous la forme "$f(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx$". Dans ce cas :

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

R 3 – Si on part d'une intégrale $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ et qu'on nous demande un changement de variable $\boxed{x=\varphi(t)}$, alors $dx = \varphi'(t)dt$ et c'est la variable actuelle x qu'on veut modifier. Il s'agit donc de remplacer les bornes de l'intégrale par "$\varphi(\alpha)$" et "$\varphi(\beta)$" puis on a :

$$\int_a^b g(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} g(x)dx = \int_\alpha^\beta g(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Exemples :

E 1 – Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx$ à l'aide d'un changement de variable $u = \dfrac{x}{x+1}$.

On pose $\forall x \in [1,2], \varphi(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

La fonction φ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$ et on a : $\forall x \in [1,2], \varphi'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} I = \int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx \\ &= \int_1^2 \ln(\varphi(x))\varphi'(x)dx \\ &= \int_{\varphi(1)}^{\varphi(2)} \ln(u)du = \int_{1/2}^{2/3} \ln(u)du \\ &= \Big[u\ln(u) - u\Big]_{1/2}^{2/3} \\ &= \frac{7}{6}\ln(2) - \frac{2}{3}\ln(3) - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

E 2 – Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{3x}dx$ à l'aide d'un changement de variable $x = e^t$.

On remarque que $1 = e^0$ et $e = e^1$.
Notons donc pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi(t) = e^t$.
La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et $\forall t \in [0,1]$, $\varphi'(t) = e^t$. On a donc :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} \frac{\ln(x)}{3x}dx \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(\varphi(t))}{3\varphi(t)}\varphi'(t)dt \\ &= \int_0^1 \frac{t}{3e^t}e^t dt \\ &= \int_0^1 \frac{t}{3}dt = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

E 3 – Les changements de variables "simples" sont les changements affines, i.e. $t = au + b$.
Dans ce cas, on a "$dt = adu$" et il suffit de changer les bornes selon les valeurs que prennent t et u.

$$\int_2^5 \exp(3t+1)dt = \int_{3\times 2+1}^{3\times 5+1} \exp(u) \times 3du \quad \text{(avec le c.v. } u = 3t+1)$$

E 4 – Un cas particulier est le changement $u = -t$. Il suffit pour cela de changer le signe des bornes, de remplacer les t par $-u$ (ou les $-t$ par u) et de changer également le du en $-dt$:

$$\int_{-1}^5 \exp(t^2+t+1)dt = \int_1^{-5} \exp(u^2-u+1)(-du) = \int_{-5}^1 \exp(u^2-u+1)du$$

Remarque :

On n'est pas obligé de "justifier" les changements de variables affines (du type $u = -t$ ou du type $u = at + b$).
Pour tous les autres, on doit écrire les hypothèses (fonction φ, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment,…).

Proposition 12

Soit $a \geqslant 0$ et soit f une fonction continue sur $[-a,a]$.

- *Si f est une fonction paire, alors :* $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt = 2\int_{-a}^0 f(t)dt$.
- *Si f est une fonction impaire, alors :* $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt = 0$ *et* $\displaystyle\int_0^a f(t)dt = -\int_{-a}^0 f(t)dt$.

Proposition 13

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui est T-périodique. Alors :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \int_{a+T}^{b+T} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$