

”L’existence est essentiellement action.” *Leibniz*

Prerequis

- Notion de limite finie en un réel.
- Etude du signe d’une fonction.
- Etre à l’aise avec les inégalités.

Objectifs

- Dérivabilité locale (approcher localement une courbe par une droite) et globale (étudier les variations d’une fonction).
- Opérations sur les fonctions dérivables.
- Connaître les premiers grands théorèmes d’analyse.

Exercices d’application

- 1, 2, 3, 6, 7, 8, 11, 12, 14, 16, 20 du TD6

1 Nombre dérivé (local)

1.1 Définitions

Définition 1

Taux d’accroissement

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, avec I un intervalle. Soient a et b deux éléments distincts de I .

On appelle **taux d’accroissement de f entre a et b** le rapport $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Remarque :

┆ Cette quantité représente le coefficient directeur de la droite (AB) avec $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$.

Exemple :

┆ Donner le taux d’accroissement de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$ entre -2 et 3.

Définition 2**Nombre dérivé en un réel**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$ tel que f soit définie au voisinage de x_0 (et en x_0).

On dit que f est **dérivable en x_0** si le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie lorsque $x \rightarrow x_0$.

Si c'est le cas, cette limite est appelée **nombre dérivé de f en x_0** , que l'on note $f'(x_0)$. On a donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Remarque :

Avec un changement de variable $h = x - x_0 \iff x = x_0 + h$, on peut également écrire que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Exemple :

Donner le nombre dérivé de la fonction carré en 3.

Définition 3**Dérivée à gauche, dérivée à droite**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

— On dit que f est **dérivable à droite en x_0** , si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.

On note alors cette limite $f'_d(x_0)$.

— On dit que f est **dérivable à gauche en x_0** , si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.

On note alors cette limite $f'_g(x_0)$.

Proposition 4

$$f \text{ dérivable en } x_0 \in I \iff \begin{cases} f \text{ dérivable à droite en } x_0 \\ f \text{ dérivable à gauche en } x_0 \\ f'_d(x_0) = f'_g(x_0) \end{cases}$$

Remarques :

R1 – Graphiquement, si f est représentée par une courbe, et si M est le point de la courbe d'abscisse x et A est le point d'abscisse x_0 , la fonction f est dérivable en x_0 si, lorsque M se rapprochant de A , les droites (AM) se rapprochent d'une droite limite non verticale, qui est alors la **droite tangente à la courbe** en A . Par définition, si f est dérivable en x_0 , la tangente en x_0 a donc pour équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

R2 – Il est possible que la tangente soit verticale, dans ce cas-là la fonction n'est pas dérivable au point (mais admet quand même une demi-tangente, par exemple fonction racine en 0).

R3 – Il est possible qu'il n'y ait pas de tangente pour la courbe en un point car le comportement à droite et à gauche diffère (par exemple s'il y a un point anguleux comme dans la fonction $x \mapsto |x|$), mais graphiquement on a alors des **demi-tangentes** à droite et à gauche.

Théorème 5**Développement Limité d'ordre 1**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Alors :

f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe un réel ℓ tel que au voisinage de x_0 on puisse écrire f sous la forme : $f(x) = f(x_0) + \ell(x - x_0) + \underset{x \rightarrow x_0}{o}(x - x_0)$. Nécessairement, on a $\ell = f'(x_0)$ et on a alors :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underset{x \rightarrow x_0}{o}(x - x_0)$$

ou autrement dit, pour h proche de 0 :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h).$$
Remarque :

Cela signifie simplement que la courbe représentative de f est, au voisinage de A d'abscisse x_0 , très proche de sa tangente. f est quasiment égale à une fonction affine, à une fonction négligeable près.

Théorème 6**Dérivable \implies Continue**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. Si la fonction f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 .

Remarque :

La réciproque est fautive. Par exemple, la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

1.2 Opérations sur les dérivées**Théorème 7****Somme, produit, quotient**

Soient f et g deux fonctions dérivables en $a \in I$. Alors

1. $f + g$ est dérivable en a et

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

2. fg est dérivable en a et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.

4. Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$
Remarque :

Une somme et un produit de fonctions dérivables sont donc toujours dérivables.

Un quotient de fonctions dérivables est dérivable là où le dénominateur ne s'annule pas.

Théorème 8*Dérivée d'une composée*

Soit $u : I \rightarrow J$ une fonction dérivable en $a \in I$. Soit $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $b = u(a) \in J$. Alors $f \circ u$ est dérivable en a et :

$$(f \circ u)'(a) = u'(a)f'(u(a))$$

Exemple :

Donner l'expression de la dérivée de la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

Théorème 9*Dérivée d'une réciproque*

Soit $f : I \rightarrow J = f(I)$ une fonction continue et strictement monotone sur I .

On sait alors que f est une bijection de I sur J .

Soit $a \in I$ tel que f soit dérivable en a . Notons $b = f(a) \in J$ (et donc $a = f^{-1}(b)$).

Alors

$$f^{-1} \text{ est dérivable en } b = f(a) \iff \begin{cases} f'(a) \neq 0 \\ \text{ou } f \text{ admet une tangente verticale en } a \end{cases}$$

Dans le cas où $f'(a) \neq 0$, on a :

$$(f^{-1})'(b) = (f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Remarques :

R1 – Graphiquement, une fonction est dérivable en un point si sa courbe représentative admet une tangente NON VERTICALE en ce point.

Puisque les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à l'axe $y = x$, la courbe de f^{-1} admet bien une tangente non verticale en un point si et seulement si la courbe de f n'admet pas de tangente horizontale au point symétrique. C'est pour cela qu'il faut que $f'(a) \neq 0$.

R2 – On retrouve facilement cette relation en dérivant la relation « $\forall x \in J, f(f^{-1}(x)) = x$ »

Exemple :

Retrouver la dérivée de la fonction exponentielle

1.3 Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Dérivabilité
1	0	\mathbb{R}
x	1	\mathbb{R}
x^2	$2x$	\mathbb{R}
x^3	$3x^2$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2}{x^3}$	\mathbb{R}^*
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
x^n ($n \in \mathbb{Z}$)	nx^{n-1}	\mathbb{R} si $n \geq 0$ \mathbb{R}^* si $n < 0$
x^α ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$

$f(x)$	$f'(x)$	Dérivabilité
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	\mathbb{R}
$e^{\alpha x}$	$\alpha e^{\alpha x}$	\mathbb{R}
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	\mathbb{R}
$\sin(x)$	$\cos(x)$	\mathbb{R}
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x)$ $= \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\text{Arctan}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}

Lorsqu'on a une expression qui est de la forme " $f(u(x))$ ", on utilise plutôt un des tableaux suivants qui donnent les dérivées usuelles de fonctions composées (sous réserve d'existence) :

$f(x)$	$f'(x)$
$u(x)$	$u'(x)$
$u(x)^2$	$2u'(x)u(x)$
$u(x)^3$	$3u'(x)u(x)^2$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'(x)}{u(x)^2}$
$\frac{1}{u(x)^2}$	$-\frac{2u'(x)}{u(x)^3}$
$u(x)^n$ ($n \in \mathbb{Z}$)	$nu'(x)u(x)^{n-1}$
$u(x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$\alpha u'(x)u(x)^{\alpha-1}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\cos(u(x))$	$-u'(x)\sin(u(x))$
$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$
$\tan(u(x))$	$u'(x)(1 + \tan^2(u(x)))$
$\text{Arctan}(u(x))$	$\frac{u'(x)}{1 + (u(x))^2}$

1.4 Équivalents usuels en 0

Remarque :

On a déjà vu qu'une fonction peut être localement approchée par une fonction affine, lorsqu'il y a une tangente non-verticale bien sûr, autrement dit lorsque la fonction est dérivable.

Théorème 10

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0 , et on suppose f dérivable au point x_0 . Alors :

$$\boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0)}$$

et en particulier, si $f'(x_0) \neq 0$, on a :

$$\boxed{f(x) - f(x_0) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)}$$

Remarque :

On en déduit alors des équivalents simples des fonctions usuelles, au voisinage de 0 par exemple.

Théorème 11

Au voisinage de 0 :

$$\frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \exp'(0) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x}$$

Au voisinage de 1 :

$$\frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ln'(1) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1}$$

De même, on obtient que au voisinage de 0 :

$$\boxed{\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}x} \quad \text{et} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \boxed{(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x}$$

$$\boxed{\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x} \quad \text{et} \quad \boxed{\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x}$$

et enfin puisque $\cos(x) - 1 = -2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$, on en déduit que :

$$\boxed{\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}}$$

Exemples :

cf Exercice 12

2 Dérivation sur un intervalle (globale)

2.1 Fonction dérivée

Définition 12

Fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur son domaine de définition D_f . Si E désigne l'ensemble des points de D_f en lesquels f est dérivable, on définit alors une fonction sur E , notée f' , telle que $f' : \begin{matrix} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{matrix}$. Cette fonction est appelée la **fonction dérivée de f** .

Remarques :

R1 – La fonction f' étant encore une fonction définie sur un intervalle ou plusieurs intervalles, on peut éventuellement encore la dériver ! On notera alors f'' la fonction $(f')'$.

R2 – Plus généralement, on peut noter :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'' \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad f^{(n)} = (f^{(n-1)})' = (f')^{(n-1)}$$

en remarquant que ces fonctions sont définies sur des ensembles de plus en plus petits (ou égaux).

R3 – On note :

- $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions **continues sur I** .
- $\mathcal{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions **continûment dérivables sur I** , i.e. l'ensemble des fonctions qui sont dérivables sur I dont la fonction dérivée f' est continue sur I .
- $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions **n fois continûment dérivables sur I** , i.e. l'ensemble des fonctions n -fois dérivables sur I dont la fonction dérivée n -ième $f^{(n)}$ est continue sur I ;
- $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des **fonctions indéfiniment dérivables sur I**

R4 – On a les inclusions suivantes : $\mathcal{C}^\infty(I) \subset \dots \subset \mathcal{C}^{n+1}(I) \subset \mathcal{C}^n(I) \subset \dots \subset \mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I)$

R5 – On admet que ces ensembles sont stables par somme, produit, quotient, composée

2.2 Dérivée et extrema

Définition 13

Point critique d'une fonction

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

On appelle **point critique de f** tout réel $x_0 \in I$ en lequel $f'(x_0) = 0$.

Remarque : Graphiquement, un point critique est simplement un point où la tangente à la courbe est horizontale.

Théorème 14

Soit f une fonction définie et dérivable sur un segment $[a, b]$.

On suppose que cette fonction admet un minimum (resp. maximum) en un réel x_0 (en un point x_1).

- | | |
|---|---|
| • Si $x_0 \in]a, b[$, alors $f'(x_0) = 0$. | • Si $x_1 \in]a, b[$, alors $f'(x_1) = 0$. |
| • Si $x_0 = a$, alors $f'_d(a) \geq 0$. | • Si $x_1 = a$, alors $f'_d(a) \leq 0$. |
| • Si $x_0 = b$, alors $f'_g(b) \leq 0$. | • Si $x_1 = b$, alors $f'_g(b) \geq 0$. |

En particulier, si f admet un extremum à l'intérieur strict de l'intervalle, alors c'est **nécessairement** en un point critique.

Remarque : "Être un point critique" est une condition nécessaire mais pas suffisante pour "être un extrémum". Par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ admet un point critique en 0, pour autant, cette fonction est strictement croissante sur \mathbb{R} .

2.3 Théorème de Rolle et Accroissements Finis

Théorème 15

Théorème de Rolle

Soient a et b deux réels avec $a < b$, et soit f une fonction de $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$f \text{ continue sur } [a, b]$$

$$f \text{ dérivable sur }]a, b[$$

$$f(a) = f(b)$$

Alors il existe (au moins) un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$ (autrement dit f admet un point critique sur $]a, b[$).

Remarque : Graphiquement, si $f(a) = f(b)$, alors il existe au moins un point de la courbe entre $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ où la tangente est horizontale.

Théorème 16

Égalité des Accroissements Finis

Soient a et b deux réels avec $a < b$ et soit f une fonction de $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que f est continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Alors il existe (au moins) un réel $c \in]a, b[$ tel que : $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \iff f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Remarque : Graphiquement, il existe au moins un point entre A et B où la tangente est parallèle à (AB) .

Conséquence 17

Inégalité des Accroissements Finis, 1ère forme

Soient a et b deux réels avec $a < b$. Soit f une fonction de $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$
- il existe deux réels m et M tels que $\forall t \in]a, b[, m \leq f'(t) \leq M$

Alors :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

Conséquence 18

Inégalité des Accroissements Finis, 2ème forme

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

On suppose qu'il existe une constante $K > 0$ vérifiant : $\forall t \in I, |f'(t)| \leq K$.

Alors :

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

2.4 Dérivée et variations

Théorème 19

Sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- f est constante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) = 0$.
- f est croissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \leq 0$.

Remarques :

R1 – Plus précisément, si $\forall x \in I, f'(x) > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur I .

R2 – Plus généralement, si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ et si f' s'annule en un nombre fini de points, alors la fonction f est strictement croissante sur I .