CHAPITRE 6

Dérivées

"L'existence est essentiellement action." *Leibniz*

Prerequis
- Notion de limite finie en un réel.
- Etude du signe d'une fonction.
- Etre à l'aise avec les inégalités.

Objectifs
- Dérivabilité locale (approcher localement une courbe par une droite) et globale (étudier les variations d'une fonction).
- Opérations sur les fonctions dérivables.
- Découvrir de grands théorèmes d'analyse.

Exercices d'application
- 1, 2, 3, 6, 7, 8, 11, 12, 14, 16, 20 du TD6

1 Nombre dérivé (local)

1.1 Définitions

Définition 1 **Taux d'accroissement**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, avec I un intervalle. Soient a et b deux éléments distincts de I.

On appelle **taux d'accroissement de f entre a et b** le rapport $\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}$.

Remarque :

Cette quantité représente le coefficient directeur de la droite (AB) avec $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$.

Exemple :

Donner le taux d'accroissement de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ entre -2 et 3.

Définition 2 **Nombre dérivé en un réel**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$ tel que f soit définie au voisinage de x_0 (et en x_0).

On dit que **f est dérivable en x_0** si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque $x \to x_0$.

Si c'est le cas, cette limite est appelée **nombre dérivé de f en x_0**, que l'on note $f'(x_0)$. On a donc

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)}$$

Remarque :

Avec un changement de variable $h = x - x_0 \Longleftrightarrow x = x_0 + h$, on peut également écrire que

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)}$$

Exemple :

Donner le nombre dérivé de la fonction carré en 3.

Définition 3 **Dérivée à gauche, dérivée à droite**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

— On dit que f est **dérivable à droite en x_0**, si $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie.

On note alors cette limite $f'_d(x_0)$.

— On dit que f est **dérivable à gauche en x_0**, si $\displaystyle\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie.

On note alors cette limite $f'_g(x_0)$.

Proposition 4

$$f \text{ dérivable en } x_0 \in I \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable à droite en } x_0 \\ f \text{ dérivable à gauche en } x_0 \\ f'_d(x_0) = f'_g(x_0) \end{cases}$$

Remarques :

R 1 – Graphiquement, si f est représentée par une courbe, et si M est le point de la courbe d'abscisse x et A est le point d'abscisse x_0, la fonction f est dérivable en x_0 si, lorsque M se rapprochant de A, les droites (AM) se rapprochent d'une droite limite non verticale, qui est alors la **tangente à la courbe de f** en A. Par définition, si f est dérivable en x_0, la tangente en x_0 a donc pour équation :

$$\boxed{y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)}$$

R 2 – Il est possible que la tangente soit verticale, dans ce cas-là la fonction n'est pas dérivable en x_0 (mais la courbe admet quand même une demi-tangente, par exemple fonction racine en 0).

R 3 – Il est possible qu'il n'y ait pas de tangente pour la courbe en un point car les comportements à droite et à gauche de x_0 sont diffèrents (par exemple s'il y a un point anguleux comme dans la courbe de la fonction $x \mapsto |x|$), mais graphiquement on a quand même des **demi-tangentes** à droite et à gauche.

Théorème 5 ***Développement Limité d'ordre 1***

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Alors :
f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe un réel ℓ tel que au voisinage de x_0 on puisse écrire f sous la forme : $f(x) = f(x_0) + \ell(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}\big(x - x_0\big)$. Nécessairement, on a $\ell = f'(x_0)$ et on a alors :

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}\big(x - x_0\big)}$$

ou autrement dit, pour h proche de 0 : $\boxed{f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \underset{h \to 0}{o}\big(h\big)}$.

Remarque :

Cela signifie simplement que la courbe représentative de f est, au voisinage de A d'abscisse x_0, très proche de sa tangente. f est quasiment égale à une fonction affine, à une fonction négligeable près.

Théorème 6 ***Dérivable $\implies$ Continue***

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. Si la fonction f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Remarque :

La réciproque est fausse. Par exemple, la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

1.2 Opérations sur les dérivées

Théorème 7 ***Somme, produit, quotient***

Soient f et g deux fonctions dérivables en $a \in I$. Alors

1. *$f + g$ est dérivable en a et*
$$\boxed{(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)}$$
2. *fg est dérivable en a et*
$$\boxed{(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)}$$
3. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.*
4. *Si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et :* $\boxed{\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}}$.

Remarque :

Une somme et un produit de fonctions dérivables sont donc toujours dérivables.
Un quotient de fonctions dérivables est dérivable là où le dénominateur ne s'annule pas.

Théorème 8 ***Dérivée d'une composée***

Soit $u : I \to J$ une fonction dérivable en $a \in I$. Soit $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $b = u(a) \in J$. Alors $f \circ u$ est dérivable en a et :

$$\boxed{(f \circ u)'(a) = u'(a) f'(u(a))}$$

Exemple :

Donner l'expression de la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

Théorème 9 ***Dérivée d'une réciproque***

Soit $f : I \to J = f(I)$ une fonction continue et strictement monotone sur I.
On sait alors que f est une bijection de I sur J.
Soit $a \in I$ tel que f soit dérivable en a. Notons $b = f(a) \in J$ (et donc $a = f^{-1}(b)$).
Alors

$$f^{-1} \text{ est dérivable en } b = f(a) \iff \begin{cases} f'(a) \neq 0 \\ \text{ou } f \text{ admet une tangente verticale en } a \end{cases}$$

Dans le cas où $f'(a) \neq 0$, on a :

$$\boxed{(f^{-1})'(b) = (f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}}$$

Remarques :

R 1 – Graphiquement, une fonction est dérivable en un point si sa courbe représentative admet une tangente NON VERTICALE en ce point.
Puisque les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à l'axe $y = x$, la courbe de f^{-1} admet bien une tangente non verticale en un point si et seulement si la courbe de f n'admet pas de tangente horizontale au point symétrique. C'est pour cela qu'il faut que $f'(a) \neq 0$.

R 2 – On retrouve facilement cette relation en dérivant la relation « $\forall x \in J,\ f(f^{-1}(x)) = x$ »

Exemple :

Retrouver la dérivée de la fonction exponentielle

1.3 Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Dérivabilité
1	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{2}{x^3}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$x^n \ (n \in \mathbb{Z})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$ $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$

$f(x)$	$f'(x)$	Dérivabilité
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$e^{\alpha x}$	$\alpha e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x)$ $= \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\mathrm{Arctan}(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

Lorsqu'on a une expression qui est de la forme "$f(u(x))$", on utilise plutôt un des tableaux suivants qui donnent les dérivées usuelles de fonctions composées (sous réserve d'existence) :

$f(x)$	$f'(x)$
$u(x)$	$u'(x)$
$u(x)^2$	$2u'(x)u(x)$
$u(x)^3$	$3u'(x)u(x)^2$
$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\dfrac{1}{u(x)}$	$-\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$
$\dfrac{1}{u(x)^2}$	$-\dfrac{2u'(x)}{u(x)^3}$
$u(x)^n \ (n \in \mathbb{Z})$	$nu'(x)u(x)^{n-1}$
$u(x)^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha u'(x)u(x)^{\alpha-1}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\cos(u(x))$	$-u'(x)\sin(u(x))$
$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$
$\tan(u(x))$	$u'(x)(1+\tan^2(u(x)))$
$\mathrm{Arctan}(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$

1.4 Équivalents usuels en 0

Remarque :

On a déjà vu qu'une fonction peut être localement approchée par une fonction affine, lorsqu'il y a une tangente non-verticale bien sûr, autrement dit lorsque la fonction est dérivable.

Théorème 10

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0, et on suppose f dérivable au point x_0. Alors :

$$\boxed{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)}$$

et en particulier, si $f'(x_0) \neq 0$, on a :

$$\boxed{f(x)-f(x_0) \underset{x\to x_0}{\sim} f'(x_0)(x-x_0)}$$

Remarque :

On en déduit alors des équivalents simples des fonctions usuelles, au voisinage de 0 par exemple.

Théorème 11

Au voisinage de 0 :

$$\frac{\exp(x)-\exp(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \exp'(0) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x}$$

Au voisinage de 1 :

$$\frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \ln'(1) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1}$$

De même, on obtient que au voisinage de 0 :

$$\boxed{\sqrt{1+x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x} \qquad \textit{et} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \boxed{(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x}$$

$$\boxed{\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x} \qquad \textit{et} \qquad \boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x}$$

et enfin puisque $\cos(x) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$, on en déduit que :

$$\boxed{\cos(x)-1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}}$$

Exemples : cf Exercice 12

2 Dérivation sur un intervalle (globale)

2.1 Fonction dérivée

Définition 12 **Fonction dérivée**

Soit f une fonction définie sur son domaine de définition D_f. Si E désigne l'ensemble des éléments de D_f en lesquels f est dérivable, on définit alors une fonction sur E, notée f', telle que $f' : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$. Cette fonction est appelée la **fonction dérivée de f**.

Remarques :

R 1 – La fonction f' étant encore une fonction définie sur un intervalle ou plusieurs intervalles, on peut éventuellement encore la dériver ! On notera alors f'' la fonction $(f')'$.

R 2 – Plus généralement, on peut noter :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'' \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1,\ f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' = (f')^{(n-1)}$$

en remarquant que ces fonctions sont définies sur des ensembles de plus en plus petits (ou égaux).

R 3 – On note :
- $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions **continues sur I**.
- $\mathcal{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions **continûment dérivables sur I**, i.e. l'ensemble des fonctions qui sont dérivables sur I dont la fonction dérivée f' est continue sur I.
- $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions **n fois continûment dérivables sur I**, i.e. l'ensemble des fonctions n-fois dérivables sur I dont la fonction dérivée n-ième $f^{(n)}$ est continue sur I ;
- $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des **fonctions indéfiniment dérivables sur I**

R 4 – On a les inclusions suivantes : $\mathcal{C}^\infty(I) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^{n+1}(I) \subset \mathcal{C}^n(I) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I)$. On admet que ces ensembles sont stables par somme, produit, quotient, composée

2.2 Dérivée et extrema

Définition 13 **Point critique d'une fonction**

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
On appelle **point critique de f** tout réel $x_0 \in I$ en lequel $f'(x_0) = 0$.

Remarque : Graphiquement, un point critique est simplement un point où la tangente à la courbe est horizontale.

Théorème 14

Soit f une fonction définie et dérivable sur un segment $[a, b]$.
On suppose que cette fonction admet un minimum (resp. maximum) en un réel x_0 (en un point x_1).

- *Si $x_0 \in]a, b[$, alors $f'(x_0) = 0$.*
- *Si $x_0 = a$, alors $f'_d(a) \geqslant 0$.*
- *Si $x_0 = b$, alors $f'_g(b) \leqslant 0$.*

- *Si $x_1 \in]a, b[$, alors $f'(x_1) = 0$.*
- *Si $x_1 = a$, alors $f'_d(a) \leqslant 0$.*
- *Si $x_1 = b$, alors $f'_g(b) \geqslant 0$.*

*En particulier, si f admet un extremum à l'intérieur strict de l'intervalle, alors c'est **nécessairement** en un point critique.*

Remarque :"Etre un point critique" est une condition nécessaire mais pas suffisante pour "être un extrêmum". Par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ admet un point critique en 0, pour autant, cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2.3 Théorème de Rolle et Accroissements Finis

Théorème 15 ***Théorème de Rolle***

Soient a et b deux réels avec $a < b$, et soit f une fonction de $[a, b] \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\boxed{f \text{ continue sur } [a,b]} \qquad \boxed{f \text{ dérivable sur }]a,b[} \qquad \boxed{f(a) = f(b)}$$

Alors il existe (au moins) un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$ (autrement dit f admet un point critique sur $]a, b[$).

Remarque : Graphiquement, si $f(a) = f(b)$, alors il existe au moins un point de la courbe entre $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ où la tangente est horizontale.

Théorème 16 ***Égalité des Acroissements Finis***

Soient a et b deux réels avec $a < b$ et soit f une fonction de $[a, b] \to \mathbb{R}$ telle que f est continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Alors il existe (au moins) un réel $c \in]a, b[$ tel que : $\boxed{\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)} \iff \boxed{f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)}$.

Remarque : Graphiquement, il existe au moins un point entre A et B où la tangente est parallèle à (AB).

Conséquence 17 ***Inégalité des Accroissements Finis, 1ère forme***

Soient a et b deux réels avec $a < b$. Soit f une fonction de $[a, b] \to \mathbb{R}$ vérifiant :

- *f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$*
- *il existe deux réels m et M tels que $\forall t \in]a, b[,\ m \leqslant f'(t) \leqslant M$*

Alors :

$$\boxed{m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)}$$

Conséquence 18 ***Inégalité des Accroissements Finis, 2ème forme***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

On suppose qu'il existe une constante $K > 0$ vérifiant : $\forall t \in I,\ |f'(t)| \leqslant K$.

Alors :

$$\boxed{\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|}$$

2.4 Dérivée et variations

Théorème 19 ***Sens de variation d'une fonction***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- *f est constante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) = 0$.*
- *f est croissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.*
- *f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \leqslant 0$.*

Remarques :

R 1 – Plus précisément, si $\boxed{\forall x \in I,\ f'(x) > 0}$, alors la fonction f est strictement croissante sur I.

R 2 – Plus généralement, si $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$ et si f' s'annule en un nombre fini de points, alors la fonction f est strictement croissante sur I.