CHAPITRE 5

Limites et continuité

"La seule limite à notre épanouissement de demain sera nos doutes d'aujourd'hui."
Franklin Roosevelt

1 Notion de limite d'une fonction

1.1 Intervalles et voisinages

Définition 1 — **Intervalles de $\mathbb{R}$**

On appelle **intervalle de $\mathbb{R}$** tout ensemble $I \subset \mathbb{R}$ sans « trou », i.e. $\forall u, v \in I, (u \leqslant x \leqslant v \Rightarrow x \in I)$.
Pour tout intervalle I non vide, on peut identifier deux bornes telles que I est l'ensemble des réels compris (au sens large ou strict) entre ces deux bornes, selon deux cas :

1. I est un intervalle à bornes finies $a, b \in \mathbb{R}$: $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, b]$.
2. I est un intervalle possédant au moins une borne infinie :

$$]-\infty, b[, \quad]-\infty, b], \quad]a, +\infty[, \quad [a, +\infty[, \quad]-\infty, +\infty[$$

Les éléments a et b sont des réels appelés **bornes finies** de l'intervalle I.

Définition 2 — **Adhérence d'un intervalle**

On appelle **adhérence de I** notée $\overline{I}$ l'intervalle I (non vide) auquel on a rajouté ses bornes finies.

1. Si I est à bornes finies $a, b \in \mathbb{R}$, alors $\overline{I} = I \cup \{a, b\} = [a, b]$, c'est un segment.
2. Si I est à borne(s) infinie(s), alors $\overline{I} =]-\infty, b]$ ou $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, +\infty[$.

Remarques :

R 1 – Dans tout le chapitre, on ne considérera que des intervalles I non vides, et des fonctions <u>définies</u> sur l'intervalle I. On a donc $f : I \to \mathbb{R}$ qui est une application.

R 2 – On notera $x_0 \in I$ pour désigner un élément de l'intervalle I.

R 3 – On notera $x_0 \in \overline{I}$ pour désigner un élément de I ou une de ses bornes finies (pas forcément dans I).

Définition 3 **Voisinage d'un réel**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{I}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- On appelle **voisinage (fermé) de x_0** tout segment V de la forme $V = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ où α est un réel strictement positif.

$$x \text{ est au voisinage de } x_0 \iff \exists \alpha > 0 \;/\; |x - x_0| \leqslant \alpha$$

- On dit qu'une propriété relative à f est vraie **au voisinage de x_0** s'il existe un $\alpha > 0$ tel que la propriété est vraie sur $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

Remarques :

R 1 – On ne considérera pour simplifier que des voisinages centrés en x_0. Plus généralement, on appelle voisinage fermé de x_0 tout segment $[x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_2]$ avec $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$.

R 2 – Le élément x_0 peut éventuellement être enlevé du voisinage.
L'ensemble $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \setminus \{x_0\}$ est appelé **voisinage épointé de x_0**.

R 3 – La notion de voisinage permet de formaliser l'idée de propriété vérifiée « à proximité » d'un élément x_0 ou « à proximité » de l'infini.

Exemple :

La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$ est bien définie au voisinage de 2 car $\left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right]$ est un intervalle contenant 2 et inclus dans D_f. Cette fonction est définie au voisinage de 1 car $[0, 2]$ est un intervalle contenant 1 et qui est, si on le prive de 1, inclus dans D_f.

Définition 4 **Voisinage de $+\infty$**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémité $+\infty$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- On appelle **voisinage de $+\infty$** tout intervalle V de la forme $V = [A, +\infty[$ où A est un réel strictement positif.

$$x \text{ est au voisinage de } +\infty \iff \exists A > 0 \;/\; x \geqslant A$$

- On dit qu'une propriété relative à f est vraie **au voisinage de $+\infty$** s'il existe $A > 0$ tel que la propriété est vraie sur $I \cap [A, +\infty[$.

Définition 5 **Voisinage de $-\infty$**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémité $-\infty$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- On appelle **voisinage de $-\infty$** tout intervalle V de la forme $V =]-\infty, B]$ où B est un réel strictement négatif.

$$x \text{ est au voisinage de } -\infty \iff \exists B < 0 \;/\; x \leqslant B$$

- On dit qu'une propriété relative à f est vraie **au voisinage de $-\infty$** s'il existe $B < 0$ tel que la propriété est vraie sur $I \cap]-\infty, B]$.

Exemple :

La fonction $g : x \longmapsto \ln(x - 8)$ est définie sur $]8, +\infty[$ qui contient au moins l'intervalle $[9, +\infty[$. Ainsi, la fonction g est définie au voisinage de $+\infty$. La fonction g n'est cependant pas définie au voisinage de $-\infty$ car D_g ne contient aucun intervalle du type $]-\infty, b]$ avec $b \in \mathbb{R}_-^*$.

1.2 Limite finie en un réel x_0

Définition 6 **Limite finie en un réel**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, soit $x_0 \in \overline{I}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que **la fonction f admet pour limite finie ℓ en x_0** si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \ /\ \forall x \in I, \quad (|x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)}$$

Autrement dit, $f(x)$ peut être aussi proche que l'on veut de ℓ, du moment que x est suffisamment proche de x_0. On note alors :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell}$$

Remarques :

R 1 –

$$|x - x_0| \leqslant \alpha \Longleftrightarrow -\alpha \leqslant x - x_0 \leqslant \alpha \Longleftrightarrow x_0 - \alpha \leqslant x \leqslant x_0 + \alpha$$

$$|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon \leqslant f(x) - \ell \leqslant \varepsilon \Longleftrightarrow \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon$$

R 2 – On peut aussi écrire que :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \ /\ \forall x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \quad \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon$$

On peut donc contrôler l'écart entre $f(x)$ et ℓ (et le rendre plus petit que n'importe quel ε) à condition de prendre x dans un voisinage V de x_0 adapté. Ce voisinage adapté dépend du ε choisi au départ. Plus ε est petit, plus x devra être proche de x_0, donc plus α sera petit.

R 3 – La phrase avec les quantificateurs s'exprime ainsi :
"Pour tout voisinage V de la limite, il existe un voisinage U de x_0 tel que $x \in U \Longrightarrow f(x) \in V$"

Théorème 7 ***Unicité de la limite finie***

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{I}$. Si f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0, alors cette limite est unique :

$$\text{Si} \quad \begin{cases} f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_1 \in \mathbb{R} \\ f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_2 \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad \text{alors} \quad \ell_1 = \ell_2$$

Théorème 8 ***Limite finie = Continuité***

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.
Si f est définie en x_0 et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors nécessairement $\ell = f(x_0)$.

Définition 9 **Continuité en un élément**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $x_0 \in I$. On dit que f est **continue en x_0** si f admet une limite finie en x_0, autrement dit si :

$$\boxed{f \text{ est continue en } x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0\ \ \forall x \in I, |x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

Définition 10 **Prolongement par continuité en une extrémité**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $x_0 \in \overline{I} \setminus I$: f n'est pas définie en x_0.

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors la fonction $\widetilde{f}$ définie par : $\widetilde{f} : \begin{array}{ccl} I \cup \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{array}$ est définie sur $I \cup \{x_0\}$ et continue en x_0. La fonction $\widetilde{f}$ est appelée le **prolongement par continuité de f en x_0**.

Remarque :

$$f \text{ est continue en } x_0 \in \overline{I} \Longleftrightarrow f \text{ admet une limite finie } \ell \text{ en } x_0$$

- Si x_0 est un élément de l'intervalle de définition I, alors $\ell = f(x_0)$.
- Si x_0 est une extrémité de I qui n'est pas dans I, alors **on prolonge la fonction f par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = \ell$**. On confondra ainsi f avec son prolongement par continuité $\widetilde{f}$.

Définition 11 **Limite à droite et à gauche**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \overline{I}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que **la fonction f admet ℓ pour limite finie à gauche en x_0** si la restriction de f à $I\cap]-\infty, x_0[$ admet ℓ comme limite en x_0 (on considère f sur l'ensemble des éléments <u>strictement</u> plus petit que x_0) :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0\ /\ \forall x \in I, \quad x_0 - \alpha \leqslant x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

  On note alors : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x\to x_0^-}{\longrightarrow} \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}{\longrightarrow} \ell$.

- On dit que **la fonction f admet ℓ pour limite finie à droite en x_0** si la restriction de f à $I\cap]x_0, +\infty[$ admet ℓ comme limite en x_0 (on considère f sur l'ensemble des éléments <u>strictement</u> plus grand que x_0) :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0\ /\ \forall x \in I, \quad x_0 < x \leqslant x_0 + \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

  On note alors : $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x\to x_0^+}{\longrightarrow} \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}{\longrightarrow} \ell$.

Remarques :

R 1 – Pour qu'une fonction admette une limite à gauche (resp. à droite) en x_0, il faut qu'elle soit définie à gauche (resp. à droite) de x_0. Il y a unicité de la limite à gauche (resp. à droite) lorsqu'elle existe.

R 2 – Cette définition permet d'étendre la notion de limite au cas où f est définie sur une union d'intervalles (comme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$) et pas seulement sur un intervalle I.

Théorème 12 ***Continuité en un point***

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$ (f est bien définie en x_0). Alors :

$$f \text{ continue en } x_0 \iff \begin{cases} f \text{ admet une limite finie à gauche en } x_0 \\ f \text{ admet une limite finie à droite en } x_0 \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

Théorème 13 ***Prolongement par continuité en un point « intérieur »***

Soit x_0 un élément d'un intervalle I. Soit $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$ (f n'est pas définie en x_0).
Si :

- *f admet une limite finie à gauche en x_0*
- *f admet une limite finie à droite en x_0*
- $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$,

alors f admet la limite ℓ en x_0. $\boxed{\text{On prolonge alors } f \text{ par continuité en } x_0 \text{ en posant } f(x_0) = \ell.}$

1.3 Limite infinie en un réel x_0

Définition 14 **Limite infinie en un réel**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, soit $x_0 \in \overline{I}$.

- On dit que **la fonction f admet pour limite $+\infty$ en x_0** si :

$$\boxed{\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0 \ / \ \forall x \in I, \quad (|x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \geqslant A)}$$

  On note alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty$$

- On dit que **la fonction f admet pour limite $-\infty$ en x_0** si :

$$\boxed{\forall B < 0,\ \exists \alpha > 0 \ / \ \forall x \in I, \quad (|x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \leqslant B)}$$

  On note alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \qquad \text{ou} \qquad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} -\infty$$

Remarques :

R 1 – L'élément $x_0 \in \overline{I}$ de la définition est forcément une extrémité de I qui n'est pas dans I.

R 2 – Si f admet une limite ℓ infinie en x_0, alors cette limite est unique.

R 3 – Graphiquement, si f admet une limite infinie en x_0, la courbe représentative de f admet alors une **asymptote (verticale) d'équation $x = x_0$**, dans le sens où la courbe va se rapprocher de cette droite sans jamais l'atteindre.

R 4 – On peut définir de même qu'auparavant une limite infinie à droite ou à gauche d'un élément x_0 en adaptant les notations.

1.4 Limite au voisinage de l'infini

Définition 15 **Limites en $+\infty$**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I admet $+\infty$ pour extrémité.

- On dit que **la fonction f admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$** si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0\ /\ \forall x \in I, \quad (x \geqslant A \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)}$$

  On note alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

- On dit que **la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$** si :

$$\boxed{\forall A > 0,\ \exists A' > 0\ /\ \forall x \in I, \quad (x \geqslant A' \Longrightarrow f(x) \geqslant A)}$$

  On note alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

- On dit que **la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$** si :

$$\boxed{\forall B < 0,\ \exists A > 0\ /\ \forall x \in I, \quad (x \geqslant A \Longrightarrow f(x) \leqslant B)}$$

  On note alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Définition 16 **Limites en $-\infty$**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I admet $-\infty$ pour extrémité.

- On dit que **la fonction f admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $-\infty$** si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists B < 0\ /\ \forall x \in I, \quad (x \leqslant B \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)}$$

  On note alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \ell$

- On dit que **la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$** si :

$$\boxed{\forall A > 0,\ \exists B < 0\ /\ \forall x \in I, \quad (x \leqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant A)}$$

  On note alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$

- On dit que **la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $-\infty$** si :

$$\boxed{\forall B < 0,\ \exists B' < 0\ /\ \forall x \in I, \quad (x \leqslant B' \Longrightarrow f(x) \leqslant B)}$$

  On note alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Remarques :

R 1 – La phrase avec les quantificateurs s'exprime toujours de la même manière :

"Pour tout voisinage V de la limite, il existe un voisinage U de x_0 tel que $x \in U \Longrightarrow f(x) \in V$"

R 2 – On a toujours unicité de la limite en $\pm\infty$ lorsqu'il y en a une.

R 3 – Lorsque f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ ou $-\infty$, graphiquement la courbe représentative de f admet alors une **asymptote (horizontale) d'équation $y = \ell$**.

R 4 – Plus généralement, la droite d'équation $y = ax+b$ est appelée **asymptote** à la courbe représentative de f au voisinage de $\pm\infty$ si on a : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \Big(f(x) - (ax+b)\Big) = 0$.

2 Opérations sur les limites

2.1 Sommes, produits et quotients

cf tableaux joints en annexe

Remarques :

R 1 – On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

R 2 – Dans toute cette partie, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$.

R 3 – *F.I.* veut dire "forme indéterminée" : dans ce cas on ne peut pas déterminer la limite par opération, il faudra étudier au cas par cas.

R 4 – Il y a donc quatre types de forme indéterminée :

$$\boxed{+\infty - \infty}, \quad \boxed{0 \times \infty}, \quad \boxed{\frac{\infty}{\infty}}, \quad \boxed{\frac{0}{0}}$$

Conséquence 17 ***Continuité par opérations***

Soient f et g deux fonctions définies sur I et continues en un élément $x_0 \in I$.
Alors :

- *la fonction somme $f + g$ est continue en x_0*
- *la fonction produit $f \times g$ est continue en x_0*

De plus, si $g(x_0) \neq 0$, alors g ne s'annule pas au voisinage de x_0, et la fonction quotient $\dfrac{f}{g}$ est alors continue en x_0.

2.2 Composition des limites

Théorème 18 ***Théorème de composition***

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$.
Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que f est définie au voisinage de x_0.

— *f admet une limite x_1 (éventuellement infinie) en x_0*

— *g admet une limite ℓ (éventuellement infinie) en x_1,*

Alors la fonction $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ admet la limite ℓ en x_0.

$$\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_1 \\ \lim\limits_{x \to x_1} g(x) = \ell \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{u \to x_1} g(u) = \ell$$

Remarques :

R 1 – La composition des limites permet donc de calculer des limites par changement de variable.
Exemple :

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-(x+1)} = \lim_{u\to-\infty} e^u = 0$$

R 2 – Avec le changement de variable $X = \dfrac{1}{x} \iff x = \dfrac{1}{X}$, on a alors :

$$x \to 0^+ \iff X \to +\infty \qquad \text{et} \qquad x \to 0^- \iff X \to -\infty$$

ce qui permet par exemple de transformer un calcul de limite en 0 en un calcul de limite en $\pm\infty$ (ou inversement)

R 3 – Avec le changement de variable $X = -x$, on a alors :

$$x \to -\infty \iff X \to +\infty$$

ce qui permet par exemple de se ramener à un calcul de limite de $-\infty$ à $+\infty$ (ou inversement)

Conséquence 19 ***Continuité par composition***

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$.
Soit $x_0 \in I$, et notons $x_1 = f(x_0)$.
Supposons que f est continue en x_0 et que g est continue en $x_1 = f(x_0)$.
Alors la fonction composée $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est continue en x_0.

3 Compatibilité limites et ordre

3.1 Limites et inégalités

Proposition 20 ***Limites et bornes***

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction telle que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

Alors :

- *f est bornée au voisinage de x_0.*
- *Si $\ell < M$, alors il existe un voisinage de x_0 tel que $f(x) < M$*
- *Si $\ell > m$, alors il existe un voisinage de x_0 tel que $f(x) > m$*
- *Si $m < \ell < M$, alors il existe un voisinage de x_0 tel que $m < f(x) < M$*
- *Si $\ell \neq 0$, alors il existe un voisinage de x_0 tel que $f(x) \neq 0$ et $f(x)$ est du signe de ℓ.*

Théorème 21 ***Passage à la limite dans une inégalité***

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction telle que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

Si dans un voisinage de x_0, on a :

- *$f(x) \geqslant m$, alors $\ell \geqslant m$.*
- *$f(x) \leqslant M$, alors $\ell \leqslant M$.*
- *$m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors $m \leqslant \ell \leqslant M$.*

Remarques :

R 1 – Par exemple, si au voisinage de x_0 on a $f(x) \geqslant 0$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, alors $\ell \geqslant 0$.

R 2 – Ce théorème ne permet pas de démontrer qu'une fonction admet une limite, mais permet seulement de comparer des limites existantes. On ne peut « passer à la limite » dans une égalité que si les objets qu'on considère possèdent bien une limite.

R 3 – Ce théorème peut être utilisé lorsque la fonction f vérifie une inégalité stricte, mais par passage à la limite les inégalités strictes deviennent toujours larges. Si $m < f(x) < M$ au voisinage de x_0 et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, alors $m \leqslant \ell \leqslant M$.

Théorème 22 ***Passage à la limite dans les inégalités***

Si f et g ont toutes deux des limites finies en $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et si pour tout x au voisinage de x_0,

$$f(x) \leqslant g(x)$$

$$\textit{alors } \lim_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Remarque :

Ici encore, par passage à la limite, l'inégalité devient systématiquement large. Par exemple pour tout réel x strictement positif on a $1 - \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{x}$ mais bien sûr en passant à la limite en $+\infty$ on a $1 \leqslant 1$.

3.2 Théorèmes d'encadrement

Théorème 23 ***Théorème « des gendarmes »***

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$, et soient trois fonctions f, g, h définies au voisinage de x_0.
Si

- *pour tout x au voisinage de x_0, on a :*

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

- *f et h admettent une <u>même limite finie</u> ℓ en x_0*

Alors, la fonction g admet également une limite finie en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$.

Remarque :

> Ce théorème n'est pas un passage à la limite, car avec ce résultat on <u>démontre</u> que g admet une limite en x_0, ce qu'on ne savait pas au préalable.

Conséquence 24 ***Encadrement par Valeur absolue***

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$ et soient deux fonctions f et g définies au voisinage de x_0.
Si

- *au voisinage de x_0, on a :*

$$|f(x) - \ell| \leqslant g(x)$$

- $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

Alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Conséquence 25 ***Produit Fonction bornée/Fonction tendant vers 0***

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 avec $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si

- *f est bornée au voisinage de x_0,*
- $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$,

Alors,

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$$

3.3 Théorème de comparaison

Théorème 26 ***Limites par comparaison***

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soient f, g deux fonctions définies au voisinage de x_0.
Supposons que pour tout x au voisinage de x_0, on a

$$f(x) \leqslant g(x)$$

- *Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, alors on a aussi $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.*
- *Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, alors on a aussi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.*

3.4 Le cas des fonctions monotones

Théorème 27 ***Théorème de la Limite Monotone***

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a, b[$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si f est monotone sur $]a, b[$ (croissante ou décroissante), alors f possède toujours une limite en a et b, la limite pouvant être finie ou infinie.

Remarques :

R 1 – Si f est croissante et majorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie ℓ en b.
On a pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \leqslant \ell$ et plus précisément :

$$\ell = \sup_{x \in]a,b[} f(x)$$

R 2 – Si f est croissante et minorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie ℓ en a.
On a pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \geqslant \ell$ et plus précisément :

$$\ell = \inf_{x \in]a,b[} f(x)$$

R 3 – Si f est décroissante et minorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie ℓ en b.
On a pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \geqslant \ell$ et plus précisément :

$$\ell = \inf_{x \in]a,b[} f(x)$$

R 4 – Si f est décroissante et majorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie ℓ en a.
On a pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \leqslant \ell$ et plus précisément :

$$\ell = \sup_{x \in]a,b[} f(x)$$

R 5 – Si f est croissante et non majorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \to b} f(x) = +\infty$

R 6 – Si f est croissante et non minorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

R 7 – Si f est décroissante et non minorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \to b} f(x) = -\infty$

R 8 – Si f est décroissante et non majorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

R 9 – Le théorème de la limite monotone peut permettre de montrer qu'une fonction monotone admet une limite, mais ne permet pas souvent de déterminer la limite explicitement.
Ex : Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ et majorée par 2, alors f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ et on peut seulement dire que $\ell \leqslant 2$ sans autre information.

R 10 – Les inégalités à la limite sont toujours larges comme dans les théorèmes précédents.
Si une fonction f est strictement positive et décroissante, alors elle admet une limite finie ℓ en $+\infty$ qui vérifie nécessairement $\ell \geqslant 0$.

4 Relations de comparaison

4.1 Négligeabilité

Définition 28 **Fonction négligeable devant une autre**

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0.
On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de x_0.

On dit que **f est négligeable devant g au voisinage de x_0** si $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0}$.

Si c'est le cas, on dit que « f est un petit-o de g en x_0 » et on note : $\boxed{f(x) = \underset{x \to x_0}{o}\Big(g(x)\Big)}$.

Remarques :

- **R 1** – Autrement dit, $f(x) = \underset{x \to x_0}{o}\Big(g(x)\Big) \Longleftrightarrow$ au voisinage de x_0, on a : $\boxed{f(x) = g(x)\varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0}$.
  Cette deuxième écriture permet d'étendre la définition si g s'annule au voisinage de x_0.
- **R 2** – La négligeabilité signifie que $f(x)$ est « bien plus petit » que $g(x)$ au voisinage de x_0 en tant qu'ordre de grandeur, c'est-à-dire sans s'occuper du signe, sur une échelle de comparaison asymptotique.

Théorème 29 ***Croissances comparées en $+\infty$***

Au voisinage de $+\infty$,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\ln(x) = \underset{x \to +\infty}{o}\Big(x\Big)}$$

Au voisinage de $+\infty$,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{x = \underset{x \to +\infty}{o}\Big(e^x\Big)}$$

Remarques :

- **R 1** – Graphiquement, une fonction tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ négligeable devant x au voisinage de $+\infty$ va avoir une courbe qui va avoir tendance à partir vers $+\infty$ de façon plutôt lente (presque horizontale), comme ln, $x \mapsto \sqrt{x}$, ...
- **R 2** – À l'inverse, si x est négligeable devant une fonction tendant vers $+\infty$ en $+\infty$, la courbe va avoir tendance à partir vers $+\infty$ de façon rapide (presque verticale) comme exp, $x \mapsto x^2$, ...

Conséquence 30 ***Croissances comparées en 0 et $-\infty$***

Au voisinage de 0^+,

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\ln(x) = \underset{x \to 0^+}{o}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Au voisinage de $-\infty$,

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{e^x = \underset{x \to -\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Conséquences 31 ***Croissances comparées***

Plus généralement, pour tous réels α, β, γ strictement positifs et si $q>1$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta}=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\gamma x}}{x^\beta}=+\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{q^x}{x^\beta}=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}x^\beta\,|\ln(x)|^\alpha=0,\qquad \lim_{x\to-\infty}x^\beta e^{\gamma x}=0,\qquad \lim_{x\to-\infty}x^\beta q^x=0$$

Remarque :

On peut écrire le résultat précédent sous la forme d'une échelle de comparaison asymptotique :

$$\boxed{(\ln(x))^\alpha \underset{x\to+\infty}{<<} x^\beta \underset{x\to+\infty}{<<} q^x}$$

où la notation $\underset{x\to+\infty}{<<}$ signifie "est négligeable devant"

4.2 Equivalence

Définition 32 **Fonctions équivalentes**

Soit $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ et soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0.
On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de x_0.

On dit que f **est équivalente à** g **au voisinage de** x_0 si $\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1}$.

Si c'est le cas, on note : $\boxed{f(x)\underset{x\to x_0}{\sim}g(x)}$.

Remarques :

R 1 – Autrement dit, $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim}g(x)\iff$ au voisinage de x_0, on a : $\boxed{f(x)=g(x)(1+\varepsilon(x))\quad\text{avec } \varepsilon(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}0}$.
Cette deuxième écriture permet d'étendre la définition si g s'annule au voisinage de x_0.

R 2 – Si $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim}g(x)$, alors $f(x)$ admet une limite si et seulement si $g(x)$ admet une limite, et ces limites sont alors les mêmes.

R 3 – L'équivalence signifie que $f(x)$ et $g(x)$ ont exactement le même comportement asymptotique au voisinage de x_0. Ainsi, si on se place au voisinage de x_0, les courbes de $f(x)$ et $g(x)$ apparaîtront comme confondues.

R 4 – Le but est de trouver une fonction g dont l'expression est plus simple que celle de la fonction f, afin de déterminer le comportement asymptotiquement plus rapidement.

Théorème 33 ***Polynômes et plus haut degré***

Une fonction polynomiale non nulle est équivalente en $\pm\infty$ à son terme de plus haut degré.
Une fonction polynomiale non nulle est équivalente en 0 à son terme de plus petit degré.
Si $j<n$ et si $a_j,a_{j+1},\dots,a_n\in\mathbb{R}$ avec $a_j\neq0$ et $a_n\neq0$, alors :

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{j+1}x^{j+1}+a_jx^j\underset{x\to\pm\infty}{\sim}a_nx^n$$

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{j+1}x^{j+1}+a_jx^j\underset{x\to0}{\sim}a_jx^j$$

Proposition 34 ***Lien entre équivalence et négligeabilité***

1.
$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \iff f(x)-g(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big) \iff g(x)-f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(f(x)\big)$$

2.
$$\textit{Si } \ g(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(f(x)\big), \qquad \textit{alors } f(x)+g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x)$$

3.
$$\textit{Si } \ f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(u(x)\big) \quad \textit{et } u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x), \qquad \textit{alors } f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(v(x)\big)$$

Remarques :

R 1 – Si ℓ est un réel non nul : $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell \iff f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \ell.$

On n'écrira cependant JAMAIS $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} 0$,(i.e. f est la fonction nulle, très peu probable).

R 2 – L'équivalence est **compatible avec le produit et le quotient** :

$$\text{Si } \begin{cases} f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x) \\ f_2(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_2(x) \end{cases}, \quad \text{alors} \quad \left| \begin{array}{l} f_1(x)f_2(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)g_2(x) \\ \text{et} \\ \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)} \end{array} \right.$$

R 3 – L'équivalence est **compatible avec une puissance fixée** :

$$\text{Si } \begin{cases} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ f(x)>0 \text{ au voisinage de } x_0 \end{cases}, \quad \text{alors } \forall \alpha\in\mathbb{R},\ (f(x))^\alpha \underset{x\to x_0}{\sim} (g(x))^\alpha$$

R 4 – L'équivalence est **compatible avec le changement de variable** ("composition à droite") :
Soit $t_0 \in \overline{R}$ et soit u une fonction définie au voisinage de t_0 avec $\lim\limits_{t\to t_0} u(t) = x_0$ avec $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$,

$$\text{Si} \begin{cases} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ f(u(t)) \text{ et } g(u(t)) \text{ existent au vois. de } t_0 \end{cases}, \quad \text{Alors } f(u(t)) \underset{t\to t_0}{\sim} g(u(t))$$

R 5 – L'équivalence est compatible avec la somme uniquement lorsque les fonctions sont du même ordre de grandeur :

$$\boxed{\text{Si } f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \alpha\, u(x) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \beta\, u(x) \quad \text{avec } \alpha+\beta\neq 0, \quad \text{alors } f(x)+g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} (\alpha+\beta)\, u(x)}$$

Dans le cas général, ce n'est pas vrai :
Si $f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_2(x)$, on n'a pas forcément $f_1(x)+f_2(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)+g_2(x)$.
Par exemple $x^2+x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ et $-x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^2+ln(x)$ mais en aucun cas $x \underset{x\to+\infty}{\sim} ln(x)$

R 6 – L'équivalence n'est pas compatible avec la composition (à gauche) : si $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$, alors on n'a pas forcément $u\circ f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} u\circ g(x)$. En particulier, on ne peut pas composer un équivalent par l'exponentielle. Par exemple $x^2+x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ mais en aucun cas $e^{x^2+x} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{x^2}$

Proposition 35 ***Composition par*** ln

Soit $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ et soient f et g deux fonctions strictement positives au voisinage de x_0.
Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 1$, alors $\ln(f(x)) \underset{x\to x_0}{\sim} \ln(g(x))$.

5 Continuité sur un intervalle

5.1 Définitions

Définition 36 **Continuité en un point**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle (ou une réunion d'intervalles) et soit $x_0 \in I$.
La fonction f est continue au point x_0 si $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$.

Définition 37 **Continuité sur un intervalle**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou une réunion d'intervalles).
On dit que **f est continue sur I** si la restriction f à I est continue en tout point de I.
On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}(I)$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

Proposition 38 ***Continuité des fonctions classiques***

Les fonctions usuelles sont toutes continues en tout point de leur ensemble de définition. C'est en particulier le cas pour :

- *les fonctions polynomiales et les fonctions rationnelles (quotient de deux fonctions polynomiales)*
- *la fonction logarithme népérien et la fonction exponentielle*
- *les fonctions trigonométriques* sin, cos.
- *les fonctions puissances $x \mapsto x^a$, en particulier les fonctions inverse et racine carrée.*
- *la fonction valeur absolue.*

Remarques :

R 1 – Si f et g sont deux fonctions continues sur I,
- la somme $f + g$ est encore une fonction continue sur I
- le produit λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) est encore une fonction continue sur I
- le produit $f \times g$ est encore une fonction continue sur I

R 2 – Si f et g sont deux fonctions continues sur I et si g ne s'annule jamais sur I, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est encore une fonction continue sur I.
En particulier, la fonction tan est continue sur son ensemble de définition.

R 3 – Si f est continue sur I et si g est continue sur J avec $f(I) \subset J$, alors la composée $g \circ f$ est continue sur I.

5.2 Théorème des Valeurs Intermédiaires

Théorème 39 ***Image d'un intervalle par continuité***

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
Autrement dit, si f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est encore un intervalle.

Remarques :

R 1 – Les intervalles I et $f(I)$ peuvent être de natures différentes (ouvert, fermé, semi-ouvert, borné, non borné, ...). (à part dans le cas du segment $[a, b]$, cf Théorème des bornes atteintes)

R 2 – L'intervalle $f(I)$ peut être réduit à un singleton (la fonction f est alors constante).

Théorème 40 ***Théorème des valeurs intermédiaires***

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$ et $f(a) \neq f(b)$.
Alors f prend toutes les valeurs "intermédiaires" comprises entre $f(a)$ et $f(b)$, i.e.

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \text{ (ou } [f(b), f(a)]), \quad \exists x \in [a, b] \ / \ y = f(x)$$

Exemple : Existence d'au moins une solution à l'équation $f(x) = 0$.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
S'il existe deux éléments $a, b \in I$, $a < b$ tels que $f(a)f(b) \leqslant 0$ (i.e. $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés), alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.

Remarque :

L'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente à l'équation $h(x) = 0$ avec $h = f - g$. On peut alors appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur la fonction $f - g$.

Théorème 41 ***Théorème des bornes atteintes***

Si f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$.
Alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.

Remarque :

Autrement dit, sur un segment $[a, b]$, une fonction f aura toujours un maximum et un minimum.
De plus, on aura $f([a, b]) = \left[\min\limits_{x \in [a,b]} f(x), \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)\right]$.

Proposition 42 ***Image directe par une fonction continue monotone***

- *Si f est une fonction croissante et continue sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = \big[f(a), f(b)\big]$*
- *Si f est une fonction décroissante et continue sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = \big[f(b), f(a)\big]$.*

Remarque :

Cela fonctionne encore pour des intervalles non fermés en adaptant l'ouverture des crochets. Par exemple :
Si f est croissante et continue sur $[a, b[$, alors : $f([a, b[) = [f(a), \lim\limits_{b} f[$.
Si f est décroissante et continue sur $]a, b]$, alors : $f(]a, b]) = [f(b), \lim\limits_{a} f[$.

Théorème 43 ***Théorème de la bijection***

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction <u>continue sur I</u> et <u>strictement monotone sur I</u>.
Alors, f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$.
De plus, sa bijection réciproque f^{-1} est également continue sur J et strictement monotone sur J, de même sens de variation que f.

Remarque :

En particulier, avec ce théorème la fonction Arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple : Existence d'exactement une solution à l'équation $f(x) = 0$.

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
S'il existe deux éléments $a, b \in I$, $a < b$ tels que $f(a)f(b) \leqslant 0$ (i.e. $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés), alors l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $[a, b]$.