

CHAPITRE 5

Limites et continuité

”La seule limite à notre épanouissement de demain sera nos doutes d’aujourd’hui.”

Franklin Roosevelt

Prerequis

- Calculer avec des fractions, factoriser.
- Bien manipuler les inégalités.
- Etre à l’aise avec les valeurs absolues.
- Connaître la courbe des fonctions de référence.

Objectifs

- Etudier les limites d’une application aux bornes de son ensemble de définition.
- Définir la notion de continuité en un point, sur un intervalle.
- Comparer des fonctions.

Exercices d’application

- 1 à 9 du TD5

1 Notion de limite d’une fonction

1.1 Intervalles et voisinages

Définition 1

Intervalles de \mathbb{R}

On appelle **intervalle de \mathbb{R}** tout ensemble $I \subset \mathbb{R}$ sans « trou », i.e. $\forall u, v \in I, (u \leq x \leq v \Rightarrow x \in I)$.

Pour tout intervalle I non vide, on peut identifier deux bornes telles que I est l’ensemble des réels compris (au sens large ou strict) entre ces deux bornes, selon deux cas :

1. I est un intervalle à bornes finies $a, b \in \mathbb{R}$: $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, b]$.
2. I est un intervalle possédant au moins une borne infinie :

$$]-\infty, b[,]-\infty, b],]a, +\infty[, [a, +\infty[,]-\infty, +\infty[$$

Les éléments a et b sont des réels appelés **bornes finies** de l’intervalle I .

Définition 2**Adhérence d'un intervalle**

On appelle **adhérence de I** notée \bar{I} l'intervalle I (non vide) auquel on a rajouté ses bornes finies.

1. Si I est à bornes finies $a, b \in \mathbb{R}$, alors $\bar{I} = I \cup \{a, b\} = [a, b]$, c'est un segment.
2. Si I est à borne(s) infinie(s), alors $\bar{I} =] - \infty, b]$ ou $[a, +\infty[$ ou $] - \infty, +\infty[$.

Remarques :

- R1** – Dans tout le chapitre, on ne considérera que des intervalles I non vides, et des fonctions définies sur l'intervalle I . On a donc $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui est une application.
- R2** – On notera $x_0 \in I$ pour désigner un élément de l'intervalle I .
- R3** – On notera $x_0 \in \bar{I}$ pour désigner un élément de I ou une de ses bornes finies (pas forcément dans I).

Définition 3**Voisinage d'un réel**

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soit $x_0 \in \bar{I}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- On appelle **voisinage (fermé) de x_0** tout segment V de la forme $V = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ où α est un réel strictement positif.

$$x \text{ est au voisinage de } x_0 \iff \exists \alpha > 0 / |x - x_0| \leq \alpha$$

- On dit qu'une propriété relative à f est vraie **au voisinage de x_0** s'il existe $\alpha > 0$ tel que la propriété est vraie sur $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

Remarques :

- R1** – On ne considérera pour simplifier que des voisinages centrés en x_0 . Plus généralement, on appelle voisinage fermé de x_0 tout segment $[x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_2]$ avec $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$.
- R2** – L'élément x_0 peut éventuellement être enlevé du voisinage. L'ensemble $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \setminus \{x_0\}$ est appelé **voisinage épointé de x_0** .

Exemple :

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est bien définie au voisinage de 2 car $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ est un intervalle contenant 2 et inclus dans D_f . Cette fonction est définie au voisinage de 1 car $[0, 2]$ est un intervalle contenant 1 et qui est, si on le prive de 1, inclus dans D_f .

Définition 4**Voisinage de $+\infty$**

Soit I un intervalle de \mathbb{R} d'extrémité $+\infty$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- On appelle **voisinage de $+\infty$** tout intervalle V de la forme $V = [A, +\infty[$ où A est un réel strictement positif.

$$x \text{ est au voisinage de } +\infty \iff \exists A > 0 / x \geq A$$

- On dit qu'une propriété relative à f est vraie **au voisinage de $+\infty$** s'il existe $A > 0$ tel que la propriété est vraie sur $I \cap [A, +\infty[$.

Définition 5**Voisinage de $-\infty$**

Soit I un intervalle de \mathbb{R} d'extrémité $-\infty$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- On appelle **voisinage de $-\infty$** tout intervalle V de la forme $V =]-\infty, B]$ où B est un réel strictement négatif.

$$x \text{ est au voisinage de } -\infty \iff \exists B < 0 / x \leq B$$

- On dit qu'une propriété relative à f est vraie **au voisinage de $-\infty$** s'il existe $B < 0$ tel que la propriété est vraie sur $I \cap]-\infty, B]$.

Exemple :

La fonction $g : x \mapsto \ln(x - 8)$ est définie sur $]8, +\infty[$ qui contient par exemple l'intervalle $[9, +\infty[$. Ainsi, la fonction g est définie au voisinage de $+\infty$. La fonction g n'est cependant pas définie au voisinage de $-\infty$ car D_g ne contient aucun intervalle du type $] -\infty, b]$ avec $b \in \mathbb{R}_*$.

1.2 Limite finie en un réel x_0 **Définition 6****Limite finie en un réel**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, soit $x_0 \in \bar{I}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que **la fonction f admet pour limite finie ℓ en x_0** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in I, (|x - x_0| \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

Autrement dit, $f(x)$ peut être aussi proche que l'on veut de ℓ , du moment que x est suffisamment proche de x_0 . On note alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$$

Exemple :

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

Remarques :

R1 –

$$|x - x_0| \leq \alpha \iff -\alpha \leq x - x_0 \leq \alpha \iff x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha$$

$$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq f(x) - \ell \leq \varepsilon \iff \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$$

R2 – On peut aussi écrire que :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$$

On peut donc contrôler l'écart entre $f(x)$ et ℓ (et le rendre plus petit que n'importe quel ε) à condition de prendre x dans un voisinage V de x_0 adapté. Ce voisinage adapté dépend du ε choisi au départ. Plus ε est petit, plus x devra être proche de x_0 , donc plus α sera petit.

R3 – La phrase avec les quantificateurs s'exprime ainsi :

”Pour tout voisinage V de la limite, il existe un voisinage U de x_0 tel que $x \in U \implies f(x) \in V$ ”

Théorème 7**Unicité de la limite finie**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \bar{I}$. Si f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0 , alors cette limite est unique :

$$\text{Si } \begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell_1 \in \mathbb{R} \\ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell_2 \in \mathbb{R} \end{cases}, \text{ alors } \ell_1 = \ell_2$$

Théorème 8**Limite finie = Continuité**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

Si f est définie en x_0 et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors nécessairement $\ell = f(x_0)$.

Définition 9**Continuité en un élément**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $x_0 \in I$. On dit que f est **continue en x_0** si f admet une limite finie en x_0 , autrement dit si :

$$f \text{ est continue en } x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Exemples :

Toutes les fonctions polynômes sont continues sur \mathbb{R} .

Définition 10**Prolongement par continuité en une extrémité**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $x_0 \in \bar{I} \setminus I$: f n'est pas définie en x_0 .

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors la fonction \tilde{f} définie par : $\tilde{f} : \begin{matrix} I \cup \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{matrix}$ est définie

sur $I \cup \{x_0\}$ et continue en x_0 . La fonction \tilde{f} est appelée le **prolongement par continuité de f en x_0** .

Exemple :

La fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ est prolongeable par continuité en 2 en posant $\tilde{f}(2) = \dots$

Remarque :

f est continue en $x_0 \in \bar{I} \iff f$ admet une limite finie ℓ en x_0

- Si x_0 est un élément de l'intervalle de définition I , alors $\ell = f(x_0)$.
- Si x_0 est une extrémité de I qui n'est pas dans I , alors **on prolonge la fonction f par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = \ell$** . On confondra ainsi f avec son prolongement par continuité \tilde{f} .

Définition 11**Limite à droite et à gauche**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \bar{I}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que **la fonction f admet ℓ pour limite finie à gauche en x_0** si la restriction de f à $I \cap]-\infty, x_0[$ admet ℓ comme limite en x_0 (on considère f sur l'ensemble des éléments strictement plus petits que x_0) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in I, \quad x_0 - \alpha \leq x < x_0 \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On note alors : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} \ell$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}]{} \ell$.

- On dit que **la fonction f admet ℓ pour limite finie à droite en x_0** si la restriction de f à $I \cap]x_0, +\infty[$ admet ℓ comme limite en x_0 (on considère f sur l'ensemble des éléments strictement plus grands que x_0) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in I, \quad x_0 < x \leq x_0 + \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On note alors : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^+} \ell$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}]{} \ell$.

Remarques :

- R1** – Pour qu'une fonction admette une limite à gauche (resp. à droite) en x_0 , il faut qu'elle soit définie à gauche (resp. à droite) de x_0 . Il y a unicité de la limite à gauche (resp. à droite) lorsqu'elle existe.
- R2** – Cette définition permet d'étendre la notion de limite au cas où f est définie sur une union d'intervalles (comme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$) et pas seulement sur un intervalle I .

Théorème 12**Continuité en un point**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$ (f est bien définie en x_0). Alors :

$$f \text{ continue en } x_0 \iff \begin{cases} f \text{ admet une limite finie à gauche en } x_0 \\ f \text{ admet une limite finie à droite en } x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

Théorème 13**Prolongement par continuité en un point « intérieur »**

Soit x_0 un élément d'un intervalle I . Soit $f : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$ (f n'est pas définie en x_0).

Si :

- f admet une limite finie à gauche en x_0
- f admet une limite finie à droite en x_0
- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$,

alors f admet la limite ℓ en x_0 . On prolonge alors f par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = \ell$.

Exemples :

cf Exercice 3

1.3 Limite infinie en un réel x_0

Définition 14

Limite infinie en un réel

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, soit $x_0 \in \bar{I}$.

- On dit que **la fonction f admet pour limite $+\infty$ en x_0** si :

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in I, (|x - x_0| \leq \alpha \implies f(x) \geq A)$$

On note alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$$

- On dit que **la fonction f admet pour limite $-\infty$ en x_0** si :

$$\forall B < 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in I, (|x - x_0| \leq \alpha \implies f(x) \leq B)$$

On note alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty$$

Exemple :

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$

Remarques :

- R1** – L'élément $x_0 \in \bar{I}$ de la définition est forcément une extrémité de I qui n'est pas dans I .
- R2** – Si f admet une limite ℓ infinie en x_0 , alors cette limite est unique.
- R3** – Graphiquement, si f admet une limite infinie en x_0 , la courbe représentative de f admet alors une **asymptote (verticale) d'équation $x = x_0$** , dans le sens où la courbe va se rapprocher de cette droite sans jamais l'atteindre.
- R4** – On peut définir de même qu'auparavant une limite infinie à droite ou à gauche d'un élément x_0 en adaptant les notations.

1.4 Limite au voisinage de l'infini

Définition 15

Limites en $+\infty$ Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, où I admet $+\infty$ pour extrémité.

- On dit que **la fonction f admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 / \forall x \in I, (x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

On note alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

- On dit que **la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$** si :

$$\forall A > 0, \exists A' > 0 / \forall x \in I, (x \geq A' \implies f(x) \geq A)$$

On note alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

- On dit que **la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$** si :

$$\forall B < 0, \exists A > 0 / \forall x \in I, (x \geq A \implies f(x) \leq B)$$

On note alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$.

Définition 16

Limites en $-\infty$ Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, où I admet $-\infty$ pour extrémité.

- On dit que **la fonction f admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $-\infty$** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B < 0 / \forall x \in I, (x \leq B \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

On note alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell$.

- On dit que **la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$** si :

$$\forall A > 0, \exists B < 0 / \forall x \in I, (x \leq B \implies f(x) \geq A)$$

On note alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$.

- On dit que **la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $-\infty$** si :

$$\forall B < 0, \exists B' < 0 / \forall x \in I, (x \leq B' \implies f(x) \leq B)$$

On note alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$.

Exemple :

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$

Remarques :

R1 – La phrase avec les quantificateurs s'exprime toujours de la même manière :

”Pour tout voisinage V de la limite, il existe un voisinage U de x_0 tel que $x \in U \implies f(x) \in V$ ”

R2 – On a toujours unicité de la limite en $\pm\infty$ lorsqu'il y en a une.

R3 – Lorsque f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ ou $-\infty$, graphiquement la courbe représentative de f admet alors une **asymptote (horizontale) d'équation $y = \ell$** .

R4 – Plus généralement, la droite d'équation $y = ax + b$ est appelée **asymptote** à la courbe représentative de f au voisinage de $\pm\infty$ si on a : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.

2 Opérations sur les limites

2.1 Sommes, produits et quotients

cf tableaux joints en annexe

Remarques :

R1 – On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

R2 – Dans toute cette partie, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.

R3 – *F.I.* veut dire ”forme indéterminée” : dans ce cas on ne peut pas déterminer la limite par opération, il faudra étudier au cas par cas.

R4 – Il y a donc quatre types de forme indéterminée :

$$\boxed{+\infty - \infty}, \quad \boxed{0 \times \infty}, \quad \boxed{\frac{\infty}{\infty}}, \quad \boxed{\frac{0}{0}}$$

Conséquence 17**Continuité par opérations**

Soient f et g deux fonctions définies sur I et continues en un élément $x_0 \in I$.

Alors :

- la fonction somme $f + g$ est continue en x_0
- la fonction produit $f \times g$ est continue en x_0

De plus, si $g(x_0) \neq 0$, alors g ne s'annule pas au voisinage de x_0 , et la fonction quotient $\frac{f}{g}$ est alors continue en x_0 .

2.2 Composition des limites

Théorème 18

Théorème de composition

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$.

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que f est définie au voisinage de x_0 .

- f admet une limite x_1 (éventuellement infinie) en x_0
- g admet une limite ℓ (éventuellement infinie) en x_1 ,

Alors la fonction $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet la limite ℓ en x_0 .

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_1 \\ \lim_{x \rightarrow x_1} g(x) = \ell \end{array} \right. \implies \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{u \rightarrow x_1} g(u) = \ell$$

Remarques :

R1 – La composition des limites permet donc de calculer des limites par changement de variable.

Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-(x+1)} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$$

R2 – Avec le changement de variable $X = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{X}$, on a alors :

$$x \rightarrow 0^+ \iff X \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad x \rightarrow 0^- \iff X \rightarrow -\infty$$

ce qui permet par exemple de transformer un calcul de limite en 0 en un calcul de limite en $\pm\infty$ (ou inversement)

R3 – Avec le changement de variable $X = -x$, on a alors :

$$x \rightarrow -\infty \iff X \rightarrow +\infty$$

ce qui permet par exemple de se ramener à un calcul de limite de $-\infty$ à $+\infty$ (ou inversement)

Conséquence 19

Continuité par composition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$.

Soit $x_0 \in I$, et notons $x_1 = f(x_0)$.

Supposons que f est continue en x_0 et que g est continue en $x_1 = f(x_0)$.

Alors la fonction composée $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en x_0 .

3 Compatibilité limites et ordre

3.1 Limites et inégalités

Proposition 20

Limites et bornes

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction telle que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

Alors :

- f est bornée au voisinage de x_0 .
- Si $\ell < M$, alors il existe un voisinage de x_0 tel que $f(x) < M$
- Si $\ell > m$, alors il existe un voisinage de x_0 tel que $f(x) > m$
- Si $m < \ell < M$, alors il existe un voisinage de x_0 tel que $m < f(x) < M$
- Si $\ell \neq 0$, alors il existe un voisinage de x_0 tel que $f(x) \neq 0$ et $f(x)$ est du signe de ℓ .

Théorème 21

Passage à la limite dans une inégalité

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction telle que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

Si dans un voisinage de x_0 , on a :

- $f(x) \geq m$, alors $\ell \geq m$.
- $f(x) \leq M$, alors $\ell \leq M$.
- $m \leq f(x) \leq M$, alors $m \leq \ell \leq M$.

Remarques :

R1 – Par exemple, si au voisinage de x_0 on a $f(x) \geq 0$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, alors $\ell \geq 0$.

R2 – Ce théorème ne permet pas de démontrer qu'une fonction admet une limite, mais permet seulement de comparer des limites existantes. On ne peut « passer à la limite » dans une égalité que si les objets qu'on considère possèdent bien une limite.

R3 – Ce théorème peut être utilisé lorsque la fonction f vérifie une inégalité stricte, mais par passage à la limite les inégalités strictes deviennent toujours larges. Si $m < f(x) < M$ au voisinage de x_0 et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, alors $m \leq \ell \leq M$.

Théorème 22

Passage à la limite dans les inégalités

Si f et g ont toutes deux des limites finies en $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et si pour tout x au voisinage de x_0 ,

$$f(x) \leq g(x)$$

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Remarque :

Ici encore, par passage à la limite, l'inégalité devient systématiquement large. Par exemple pour tout réel x strictement positif on a $1 - \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{x}$ mais bien sûr en passant à la limite en $+\infty$ on a $1 \leq 1$.

3.2 Théorèmes d'encadrement

Théorème 23

Théorème « des gendarmes »

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$, et soient trois fonctions f, g, h définies au voisinage de x_0 .

Si

- pour tout x au voisinage de x_0 , on a :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

- f et h admettent une même limite finie ℓ en x_0

Alors, la fonction g admet également une limite finie en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$.

Remarque :

Ce théorème n'est pas seulement un passage à la limite, car avec ce résultat on démontre que g admet une limite en x_0 , ce qu'on ne savait pas au préalable.

Exemple :

Déterminer par encadrement $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x}$

Conséquence 24

Encadrement par Valeur absolue

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$ et soient deux fonctions f et g définies au voisinage de x_0 .

Si

- au voisinage de x_0 , on a :

$$|f(x) - \ell| \leq g(x)$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

Conséquence 25

Produit Fonction bornée/Fonction tendant vers 0

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 avec $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si

- f est bornée au voisinage de x_0 ,
- $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$,

Alors,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$$

Exemple :

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

3.3 Théorème de comparaison

Théorème 26*Limites par comparaison*

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soient f, g deux fonctions définies au voisinage de x_0 .
Supposons que pour tout x au voisinage de x_0 , on a

$$f(x) \leq g(x)$$

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, alors on a aussi $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, alors on a aussi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Exemple :

En admettant que pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$, retrouver par comparaison $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$

3.4 Le cas des fonctions monotones

Théorème 27

Théorème de la Limite Monotone

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a, b[$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si f est monotone sur $]a, b[$ (croissante ou décroissante), alors f possède toujours une limite en a et b , la limite pouvant être finie ou infinie.

Remarques :

- R1** – Si f est croissante et majorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie ℓ en b .
On a pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \leq \ell$ et plus précisément :

$$\ell = \sup_{x \in]a, b[} f(x)$$

- R2** – Si f est croissante et minorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie ℓ en a .
On a pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \geq \ell$ et plus précisément :

$$\ell = \inf_{x \in]a, b[} f(x)$$

- R3** – Si f est décroissante et minorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie ℓ en b .
On a pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \geq \ell$ et plus précisément :

$$\ell = \inf_{x \in]a, b[} f(x)$$

- R4** – Si f est décroissante et majorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie ℓ en a .
On a pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \leq \ell$ et plus précisément :

$$\ell = \sup_{x \in]a, b[} f(x)$$

- R5** – Si f est croissante et non majorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$

- R6** – Si f est croissante et non minorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

- R7** – Si f est décroissante et non minorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty$

- R8** – Si f est décroissante et non majorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

- R9** – Le théorème de la limite monotone peut permettre de montrer qu'une fonction monotone admet une limite, mais **ne permet pas** souvent de déterminer la limite explicitement.

Ex : Si f est croissante sur \mathbb{R} et majorée par 2, alors f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ et on peut **seulement** dire que $\ell \leq 2$ sans autre information.

- R10** – Les inégalités à la limite sont **toujours larges** comme dans les théorèmes précédents.

Si une fonction f est strictement positive et décroissante, alors elle admet une limite finie ℓ en $+\infty$ qui vérifie nécessairement $\ell \geq 0$.

4 Relations de comparaison

4.1 Négligeabilité

Définition 28

Fonction négligeable devant une autre

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 .

On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de x_0 .

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Si c'est le cas, on dit que « f est un petit-o de g en x_0 » et on note : $f(x) = o_{x \rightarrow x_0}(g(x))$.

Remarques :

R1 – Autrement dit, $f(x) = o_{x \rightarrow x_0}(g(x)) \iff$ au voisinage de x_0 , on a : $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$.

Cette deuxième écriture permet d'étendre la définition si g s'annule au voisinage de x_0 .

R2 – La négligeabilité signifie que $f(x)$ est « bien plus petit » que $g(x)$ au voisinage de x_0 en tant qu'ordre de grandeur, c'est-à-dire sans s'occuper du signe, sur une échelle de comparaison asymptotique.

Théorème 29

Croissances comparées en $+\infty$

Au voisinage de $+\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \iff \ln(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(x)$$

Au voisinage de $+\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \iff x = o_{x \rightarrow +\infty}(e^x)$$

Remarques :

R1 – Graphiquement, une fonction tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ négligeable devant x au voisinage de $+\infty$ va avoir une courbe qui va avoir tendance à partir vers $+\infty$ de façon plutôt lente (presque horizontale), comme \ln , $x \mapsto \sqrt{x}$, ...

R2 – À l'inverse, si x est négligeable devant une fonction tendant vers $+\infty$ en $+\infty$, la courbe va avoir tendance à partir vers $+\infty$ de façon rapide (presque verticale) comme \exp , $x \mapsto x^2$, ...

Conséquence 30

Croissances comparées en 0 et $-\infty$

Au voisinage de 0^+ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \iff \ln(x) = o_{x \rightarrow 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Au voisinage de $-\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \iff e^x = o_{x \rightarrow -\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Conséquences 31*Croissances comparées*

Plus généralement, pour tous réels α, β, γ strictement positifs et si $q > 1$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\gamma x}}{x^\beta} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{q^x}{x^\beta} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^\beta e^{\gamma x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^\beta q^x = 0$$

Remarque :

On peut écrire le résultat précédent sous la forme d'une échelle de comparaison asymptotique :

$$\boxed{(\ln(x))^\alpha \ll_{x \rightarrow +\infty} x^\beta \ll_{x \rightarrow +\infty} q^x}$$

où la notation $\ll_{x \rightarrow +\infty}$ signifie "est négligeable devant"

4.2 Equivalence**Définition 32***Fonctions équivalentes*

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 .

On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de x_0 .

On dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Si c'est le cas, on note : $\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)}$.

Remarques :

R1 – Autrement dit, $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \iff$ au voisinage de x_0 , on a : $\boxed{f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))}$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$.

Cette deuxième écriture permet d'étendre la définition si g s'annule au voisinage de x_0 .

R2 – Si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$, alors $f(x)$ admet une limite si et seulement si $g(x)$ admet une limite, et ces limites sont alors les mêmes.

R3 – L'équivalence signifie que $f(x)$ et $g(x)$ ont exactement le même comportement asymptotique au voisinage de x_0 . Ainsi, si on se place au voisinage de x_0 , les courbes de f et g apparaîtront comme confondues.

R4 – Le but est de trouver une fonction g dont l'expression est plus simple que celle de la fonction f , afin de déterminer le comportement asymptotiquement plus rapidement.

Théorème 33*Polynômes et plus haut degré*

Une fonction polynomiale non nulle est équivalente en $\pm\infty$ à son terme de plus haut degré.

Une fonction polynomiale non nulle est équivalente en 0 à son terme de plus petit degré.

Si $j < n$ et si $a_j, a_{j+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ avec $a_j \neq 0$ et $a_n \neq 0$, alors :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} a_n x^n$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_j x^j$$

Proposition 34**Lien entre équivalence et négligeabilité**

1.

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \iff f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x)) \iff g(x) - f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(f(x))$$

2.

$$\text{Si } g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(f(x)), \quad \text{alors } f(x) + g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f(x)$$

3.

$$\text{Si } f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(u(x)) \quad \text{et } u(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} v(x), \quad \text{alors } f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(v(x))$$

Remarques :

R1 – Si ℓ est un réel non nul : $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\rightarrow} \ell \iff f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \ell$.

On n'écrira cependant JAMAIS $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} 0$, (i.e. f est la fonction nulle, très peu probable).

R2 – L'équivalence est **compatible avec le produit et le quotient** :

$$\text{Si } \begin{cases} f_1(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_1(x) \\ f_2(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_2(x) \end{cases}, \quad \text{alors } \begin{cases} f_1(x)f_2(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_1(x)g_2(x) \\ \text{et} \\ \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \end{cases}$$

R3 – L'équivalence est **compatible avec une puissance fixée** :

$$\text{Si } \begin{cases} f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \\ f(x) > 0 \text{ au voisinage de } x_0 \end{cases}, \quad \text{alors } \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (f(x))^\alpha \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} (g(x))^\alpha$$

R4 – L'équivalence est **compatible avec le changement de variable** ("composition à droite") :

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soit u une fonction définie au voisinage de t_0 avec $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = x_0$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\text{Si } \begin{cases} f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \\ f(u(t)) \text{ et } g(u(t)) \text{ existent au vois. de } t_0 \end{cases}, \quad \text{alors } f(u(t)) \underset{t \rightarrow t_0}{\sim} g(u(t))$$

R5 – L'équivalence est compatible avec la somme uniquement lorsque les fonctions sont du même ordre de grandeur :

$$\text{Si } f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \alpha u(x) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \beta u(x) \quad \text{avec } \alpha + \beta \neq 0, \quad \text{alors } f(x) + g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} (\alpha + \beta) u(x)$$

Dans le cas général, ce n'est pas vrai :

Si $f_1(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_2(x)$, on n'a pas forcément $f_1(x) + f_2(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_1(x) + g_2(x)$.

Par exemple $x^2 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$ et $-x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x^2 + \ln(x)$ mais en aucun cas $x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$

R6 – L'équivalence n'est pas compatible avec la composition (à gauche) : si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$, alors on n'a pas forcément $u \circ f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} u \circ g(x)$. En particulier, on ne peut pas composer un équivalent par l'exponentielle. Par exemple $x^2 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$ mais en aucun cas $e^{x^2+x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{x^2}$

Proposition 35**Composition à gauche par \ln**

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soient f et g deux fonctions strictement positives au voisinage de x_0 .

Si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 1$, alors $\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \ln(g(x))$.

5 Continuité sur un intervalle

5.1 Définitions

Définition 36

Continuité en un point

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle (ou une réunion d'intervalles) et soit $x_0 \in I$.

La fonction f est continue au point x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Définition 37

Continuité sur un intervalle

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et I un intervalle contenu dans D (D peut être une réunion d'intervalles).

On dit que f est continue sur I si la restriction f à I est continue en tout point de I .

On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}(I)$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I .

Proposition 38

Continuité des fonctions classiques

Les fonctions usuelles sont toutes continues en tout point de leur ensemble de définition. C'est en particulier le cas pour :

- les fonctions polynomiales et les fonctions rationnelles (quotient de deux fonctions polynomiales)
- la fonction logarithme népérien et la fonction exponentielle
- les fonctions trigonométriques \sin , \cos .
- les fonctions puissances $x \mapsto x^a$, en particulier les fonctions inverse et racine carrée.
- la fonction valeur absolue.

Remarques :

R1 – Si f et g sont deux fonctions continues sur I ,

- la somme $f + g$ est encore une fonction continue sur I
- le produit λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) est encore une fonction continue sur I
- le produit $f \times g$ est encore une fonction continue sur I

R2 – Si f et g sont deux fonctions continues sur I et si g ne s'annule jamais sur I , alors la fonction $\frac{f}{g}$ est encore une fonction continue sur I . En particulier, la fonction \tan est continue sur

R3 – Si f est continue sur I et si g est continue sur J avec $f(I) \subset J$, alors la composée $g \circ f$ est continue sur I .

5.2 Théorème des Valeurs Intermédiaires

Théorème 39

Image d'un intervalle par continuité

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Autrement dit, si f est continue sur un intervalle I , alors $f(I)$ est encore un intervalle.

Remarques :

R1 – Les intervalles I et $f(I)$ peuvent être de natures différentes (ouvert, fermé, semi-ouvert, borné, non borné, ...). (à part dans le cas du segment $[a, b]$, cf Théorème des bornes atteintes)

R2 – L'intervalle $f(I)$ peut être réduit à un singleton (la fonction f est alors constante).

Théorème 40**Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$ et $f(a) \neq f(b)$. Alors f prend toutes les valeurs "intermédiaires" comprises entre $f(a)$ et $f(b)$, i.e.

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \text{ (ou } [f(b), f(a)]), \quad \exists x \in [a, b] / y = f(x)$$

Exemple : Existence d'au moins une solution à l'équation $f(x) = 0$.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

S'il existe deux éléments $a, b \in I$, $a < b$ tels que $f(a)f(b) \leq 0$ (i.e. $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés), alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a, b]$. (cf Exercice 5)

Remarque :

L'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente à l'équation $h(x) = 0$ avec $h = f - g$. On peut alors appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur la fonction $f - g$.

Théorème 41**Théorème des bornes atteintes**

Si f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$.

Alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.

Remarque :

Autrement dit, sur un segment $[a, b]$, une fonction f aura toujours un maximum et un minimum.

De plus, on aura $f([a, b]) = \left[\min_{x \in [a, b]} f(x), \max_{x \in [a, b]} f(x) \right]$.

Proposition 42**Image directe par une fonction continue monotone**

- Si f est une fonction croissante et continue sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$
- Si f est une fonction décroissante et continue sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$.

Remarque :

Cela fonctionne encore pour des intervalles non fermés en adaptant l'ouverture des crochets. Par exemple :

Si f est croissante et continue sur $[a, b[$, alors : $f([a, b[) = [f(a), \lim_b f[$.

Si f est décroissante et continue sur $]a, b]$, alors : $f(]a, b]) = [f(b), \lim_a f[$.

Théorème 43**Théorème de la bijection**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et strictement monotone sur I .

Alors, f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$.

De plus, sa bijection réciproque f^{-1} est également continue sur J et strictement monotone sur J , de même sens de variation que f .

Remarque :

En particulier, avec ce théorème la fonction Arctan est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .

Exemple : Existence d'exactly une solution à l'équation $f(x) = 0$.

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .

S'il existe deux éléments $a, b \in I$, $a < b$ tels que $f(a)f(b) \leq 0$ (i.e. $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés), alors l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $[a, b]$. (cf Exercice 6)