

CHAPITRE 4

Fonctions d'une variable réelle

”Les mathématiques ne sont pas une moindre immensité que la mer.” *Victor Hugo*

Prerequis

- Calculer avec des fractions, développer, réduire, factoriser.
- Construire la courbe d'une fonction de référence

Objectifs

- Etudier le comportement d'une fonction par transformation des fonctions de référence

Exercices d'application

- 2, 3, 4, 6, 9, 10, 11, 13 à 17 du TD4

1 Généralités sur les fonctions

1.1 Définitions

Définition 1

Soient I et J deux parties de \mathbb{R} . On appelle f une **fonction de I dans J** le fait d'associer, à tout élément x de I , au maximum un élément de J noté $f(x)$, et appelé **image de x par f** .

- On appelle alors **domaine de définition** de la fonction f le sous-ensemble D_f de I constitué par tous les éléments de I qui ont une image par f , autrement dit tous les x de I tels que $f(x)$ existe.
- J est appelé l'**ensemble d'arrivée** de f , peut-être plus "gros" que nécessaire.
- Si $y \in J$, on appelle **antécédent** de y tout $x \in D_f$ tel que $f(x) = y$.

La fonction f se note finalement :

$$f : \begin{array}{ccc} D_f & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

ou tout simplement :

$$f : x \longmapsto f(x)$$

si les ensembles de départ et d'arrivée sont connus (ou implicites). Une fois que la fonction f est restreinte à son domaine de définition, on dit que f est une **application**.

Exemples :

- E1** – Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{x}$. C'est une fonction de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans \mathbb{R} .
- E2** – Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto e^x$. C'est une fonction définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
- E3** – Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$. C'est presque g , mais on a précisé l'ensemble d'arrivée ($\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$).
- E4** – Soit $u : [1, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$. C'est presque h , c'est la **restriction** de la fonction h sur $[1, +\infty[$.

Remarques :

- R1** – Dans une fonction, TOUS les éléments de D_f admettent une (et une seule) image dans J . Cependant, les éléments de J n'ont pas forcément tous un antécédent dans D_f par la fonction : l'ensemble J peut être a priori plus "gros" que nécessaire.
- R2** – Deux fonctions f et g sont égales si et seulement si :
 — elles ont le même domaine de définition $D_f = D_g$
 — elles ont le même ensemble d'arrivée J ,
 — $\forall x \in D_f, f(x) = g(x)$
- R3** – Si f et g sont deux fonctions définies sur une partie I de \mathbb{R} , on peut alors créer une combinaison linéaire de f et g , une fonction produit, et parfois une fonction inverse :
 • $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (\lambda f + g)(x) = \lambda f(x) + g(x)$.
 • $\forall x \in I, (fg)(x) = f(x)g(x)$.
 • $\forall x \in I, \text{ si } g(x) \neq 0, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

1.2 Composition de fonctions**Définition 2**

Soient E, F, G trois parties de \mathbb{R} .

Soit f une fonction de E vers F , et soit g une fonction de F dans G .

On appelle **fonction composée de f suivie de g** l'application notée $g \circ f$ définie par :

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{array}$$

Remarques :

- R1** – Pour que $g \circ f$ soit bien définie, l'ensemble d'arrivée de la fonction f doit être inclus/contenu dans l'ensemble de départ de la fonction g .
- R2** – Si les fonctions existent, on n'a pas forcément $g \circ f = f \circ g$. On dit que la loi de composition "o" n'est pas commutative.

Exemple :

Soient les fonctions : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto 2x - 3$ et $x \longmapsto \ln(x)$.

Peut-on définir $f \circ g$?

L'ensemble d'arrivée de g est \mathbb{R} donc on peut bien composer par f ensuite.

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln(x)) = 2 \ln(x) - 3$$

Peut-on définir $g \circ f$?

L'application f va de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , donc a priori, certaines images ne seront pas dans \mathbb{R}^{+*} . On ne peut pas écrire $g \circ f$ sur tout \mathbb{R} :

$$2x - 3 \in \mathbb{R}^{+*} \iff 2x - 3 > 0 \iff 2x > 3 \iff x > \frac{3}{2}$$

Ainsi pour tout $x > \frac{3}{2}$, on peut définir $g \circ f(x)$, et alors on a :

$$\forall x \in \left] \frac{3}{2}, +\infty \right[, \quad g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x - 3) = \ln(2x - 3)$$

1.3 Symétries**Définition 3**

Soit f une fonction de D dans \mathbb{R} . On dit que :

- f est **paire** si : $(\forall x \in D, -x \in D)$ et $(\forall x \in D, f(-x) = f(x))$.

La courbe représentative de f est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

- f est **impaire** si : $(\forall x \in D, -x \in D)$ et $(\forall x \in D, f(-x) = -f(x))$.

La courbe représentative de f est alors symétrique par rapport à l'origine du repère.

Remarques :

R1 – La composée d'une fonction paire suivie d'une fonction quelconque est paire.

R2 – La composée de deux fonctions impaires est impaire.

R3 – Une courbe peut admettre plus généralement un **axe de symétrie** d'équation $x = a$, ou alors un **centre de symétrie** $\Omega(a, b)$.

Méthode pour rechercher une éventuelle symétrie :

L'ensemble D doit être symétrique par rapport à a . De plus, si pour tout réel h tel que $a + h \in D$:

- $f(a + h) = f(a - h)$, alors la courbe représentative de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$.
- $f(a + h) + f(a - h) = 2b$, alors la courbe représentative de f est symétrique par rapport au point $\Omega(a, b)$.

— Connaître les symétries sur une courbe permet de restreindre le domaine d'étude d'une fonction.

Exemples :

E1 – Etudier la parité de la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 1$.

E2 – La courbe de la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (x + 1)^2$ admet-elle un axe ou un centre de symétrie ?

1.4 Périodicité

Définition 4

Soit f une fonction de D dans \mathbb{R} et soit T un réel. On dit que f est **T -périodique** si :

- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $x \in D \iff x + T \in D$
- $\forall x \in D$, $f(x + T) = f(x)$

Exemples :

Les fonctions trigonométriques sin et cos sont périodiques de période La fonction tan est périodique de période

1.5 Fonctions monotones

Définition 5

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit I un intervalle de \mathbb{R} . On dit que :

- f est **croissante sur I** si : $\forall a, b \in I$, $a < b \implies f(a) \leq f(b)$.
- f est **strictement croissante sur I** si : $\forall a, b \in I$, $a < b \implies f(a) < f(b)$.
- f est **décroissante sur I** si : $\forall a, b \in I$, $a < b \implies f(a) \geq f(b)$.
- f est **strictement décroissante sur I** si : $\forall a, b \in I$, $a < b \implies f(a) > f(b)$.

Remarques :

R1 – La composée de deux fonctions de même monotonie est

R2 – La composée de deux fonctions de monotonies contraires est

R3 – Finalement, c'est comme la règle des signes : $+\times+$ ou $-\times-$ donne $+$ et $+\times-$ ou $-\times+$ donne $-$

1.6 Fonctions majorées et minorées

Définition 6

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que :

- f est **majorée sur D** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in D$, $f(x) \leq M$
- f est **minorée sur D** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in D$, $f(x) \geq m$.
- f est bornée sur D si f est majorée et minorée sur D .

Exemple :

La fonction inverse est sur et sur

Remarque :

En particulier, lorsqu'une fonction est minorée par 0, on dit qu'elle est **positive**.

Lorsqu'une fonction est majorée par 0, on dit qu'elle est **négative**.

Définition 7

Max/Min

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que M est un **maximum** de la fonction f sur I si
 - (i) M est un majorant de la fonction f
 - (ii) $\exists x \in I$ tel que $f(x) = M$
- On dit que M est un **minimum** de la fonction f sur I si
 - (i) M est un minorant de la fonction f
 - (ii) $\exists x \in I$ tel que $f(x) = m$

Définition 8

Sup/Inf

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est une fonction majorée sur I , alors l'ensemble des majorants de f admet un plus petit élément, appelé la **borne supérieure de f** . On le note : $\sup_{x \in I} f(x)$
- Si f est une fonction minorée sur I , alors l'ensemble des minorants de f admet un plus grand élément, appelé la **borne inférieure de f** . On le note : $\inf_{x \in I} f(x)$.

Remarque :

Si la borne supérieure est atteinte par la fonction f , alors la borne supérieure devient un maximum. De même pour la borne inférieure qui devient un minimum lorsqu'elle est atteinte.

1.7 Transformations d'une fonction**Exemple :**

Dans un repère orthonormé, représenter en bleu la courbe de la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 2x$. Représenter en rouge la courbe de $-f$; en vert celle de $f + 2$ et en noir celle de $2f$.

Remarque :

Si $f : x \mapsto f(x)$ est une fonction donnée de courbe \mathcal{C}_f dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , alors :

- La courbe de la fonction $x \mapsto -f(x)$ est la symétrique de \mathcal{C}_f par rapport à l'axe des abscisses.
- La courbe de la fonction $x \mapsto f(-x)$ est la symétrique de \mathcal{C}_f par rapport à l'axe des ordonnées.
- La courbe de la fonction $x \mapsto f(x + \alpha)$ est la translatée horizontale de \mathcal{C}_f de vecteur $-\alpha \vec{i}$.
- La courbe de la fonction $x \mapsto f(x) + \beta$ est la translatée verticale de \mathcal{C}_f de vecteur $\beta \vec{j}$.
- La courbe de la fonction $x \mapsto \lambda f(x)$ est celle de f dilatée verticalement avec un changement d'échelle.

2 Images et antécédents

2.1 Images directes, images réciproques

Définition 9

Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction définie sur I .

Si $A \subset I$, on appelle **image directe de A** l'ensemble de toutes les images des éléments de A par la fonction f :

$$f(A) = \{f(x), x \in A\}$$

Si $B \subset J$, on appelle **image réciproque de B** l'ensemble de tous les antécédents des éléments de B par la fonction f :

$$f^{-1}(B) = \{x \in I / f(x) \in B\}$$

Remarque :

On peut donc écrire que, si $A \subset I$ et $B \subset J$, $\forall z \in J, z \in f(A) \iff \exists w \in A / z = f(w)$

$$\forall u \in I, u \in f^{-1}(B) \iff f(u) \in B$$

2.2 Fonctions injectives

Définition 10

Soient I et J deux ensembles et soit $f : I \rightarrow J$ une fonction de I dans J .

On dit que f est une **fonction injective** si tous les éléments de J admettent **au plus un antécédent**, i.e. ils en admettent un ou aucun.

Autrement dit,

$$f \text{ injective} \iff \forall x, x' \in I, \text{ si } f(x) = f(x'), \text{ alors } x = x'$$

Remarque :

On a également : $f \text{ injective} \iff \forall x, x' \in I, \text{ si } x \neq x', \text{ alors } f(x) \neq f(x')$.

Proposition 11

Si I est un intervalle et si $f : I \rightarrow J$ est strictement monotone sur I , alors f est injective.

2.3 Fonctions surjectives

Définition 12

Soient I et J deux ensembles et soit $f : I \rightarrow J$ une fonction de I dans J .

On dit que f est une **fonction surjective** si tous les éléments de J admettent au moins un antécédent. Autrement dit,

$$f \text{ surjective} \iff \forall y \in J, \exists x \in I / y = f(x)$$

Remarques :

R1 – On a également : $f \text{ surjective} \iff f(I) = J$.

R2 – Si f est une fonction de I dans J , $f : I \rightarrow f(I)$ est toujours surjective.

Exemple :

La fonction carré définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R}^+ est mais pas

2.4 Fonctions bijectives

Définition 13

Soient I et J deux ensembles et soit $f : I \rightarrow J$ une fonction de I dans J .

On dit que f est une **fonction bijective** si tous les éléments de J admettent exactement un et un seul antécédent par la fonction f dans I .

Autrement dit,

$$f \text{ bijective} \iff \forall y \in J, \exists ! x \in I / y = f(x)$$

Remarques :

R1 – Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction. Alors

$$f \text{ bijective} \iff \begin{cases} f \text{ injective} \\ f \text{ surjective} \end{cases}$$

R2 – Soit I est un intervalle de \mathbb{R} et soit $f : I \rightarrow J$ une fonction strictement monotone sur I .

Alors, la fonction $f : I \rightarrow f(I)$ est bijective, autrement-dit, f réalise une bijection si on restreint l'espace d'arrivée à $f(I)$.

Exemple :

La fonction $f : [-8; 9] \rightarrow \dots\dots\dots$ définie par $f(x) = x + 1$ est bijective.

Définition 14

Si f est bijective de I vers J , alors tout élément y de J admet un et un seul antécédent dans I . On définit ainsi une fonction de J dans I , appelée **fonction réciproque**, notée f^{-1} . On a alors

$$\forall (x, y) \in I \times J \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

Remarques :

R1 – Si f est bijective de I sur J , alors f^{-1} est une bijection de J sur I et on a :

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

R2 – Si f est bijective de I dans J , alors f est inversible et sa fonction réciproque est f^{-1} , autrement dit :

$$\forall x \in I, f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in J, f(f^{-1}(y)) = y$$

R3 – Si on a une fonction f de I dans J bijective, alors pour tout $x \in I$ et $y \in J$, on a :

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

Donc si on connaît $y = f(x)$, il suffit d'exprimer x en fonction y pour déterminer l'expression de la fonction réciproque.

R4 – Les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (i.e. la droite d'équation $y = x$).

R5 – Si $f : I \rightarrow J$ est bijective et strictement monotone sur I , alors f^{-1} est strictement monotone sur J , de même monotonie que f .

Exemple :

La fonction f définie précédemment admet pour bijection réciproque la fonction définie par $f^{-1}(x) = \dots\dots\dots$

3 Fonctions usuelles à connaître

3.1 Fonctions affines et linéaires

Définition 15

Les **fonctions affines** sont les fonctions f du type :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Remarques :

- R1** – Lorsque $b = 0$ (on a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax$), on dit que f est une **fonction linéaire**.
- R2** – Lorsque $a = 0$ (on a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = b$), on dit que f est une **fonction constante**.
- R3** – Les fonctions affines ont pour courbe représentative une droite non verticale.
Le nombre a représente le **coefficient directeur (ou pente)** et b **l'ordonnée à l'origine**.
- R4** – Les fonctions affines sont des fonctions polynomiales, de degré 1.
- R5** – Si $a > 0$, f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- R6** – Si $a < 0$, f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

Exemple :

La fonction f définie précédemment est

3.2 Fonction carré, fonctions polynomiales de degré 2

Définition 16

Les **fonctions polynomiales de degré 2** sont les fonctions f du type :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{avec } (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$$

Exemple :

La fonction **carré** $x \mapsto x^2$ est paire, a pour courbe une **parabole**, est décroissante sur $] -\infty, 0]$, croissante sur $[0, +\infty[$, elle admet donc un minimum en 0 qui vaut 0.

Remarques :

- R1** – Toutes les fonctions polynomiales de degré 2 ont aussi pour courbe une parabole. En effet :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a} = a(x + \alpha)^2 + \beta$$

La courbe est donc celle de la fonction carré, décalée horizontalement suivant $-\alpha \vec{i}$, puis dilatée suivant un coefficient a , puis translatée verticalement suivant $\beta \vec{j}$.

- R2** – Si $a > 0$, la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est représentée par une parabole tournée « vers le haut », ayant son minimum en $-\frac{b}{2a}$.
- R3** – Si $a < 0$, la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est représentée par une parabole tournée « vers le bas », ayant son maximum en $-\frac{b}{2a}$.

3.3 Fonction inverse

Définition 17

La **fonction inverse** est la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1}{x}$.

Remarques :

R1 – La fonction inverse est impaire.

R2 – La courbe de la fonction inverse est une **hyperbole** (à deux branches).

R3 – La fonction inverse est décroissante sur $] -\infty, 0[$ et décroissante sur $]0, +\infty[$.

$$\text{si } 0 < a \leq b \quad \text{alors } 0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}, \quad \text{si } a \leq b < 0 \quad \text{alors } \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0$$

R4 – La fonction inverse n'est pas décroissante sur \mathbb{R}^* , cela n'a pas de sens puisque \mathbb{R}^* n'est pas un intervalle de \mathbb{R} !

R5 – Plus généralement, on appelle **fonctions homographiques** les fonctions qui sont le quotient de deux fonctions affines, i.e. du type :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}, f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \text{avec } (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, c \neq 0$$

Toute fonction homographique peut avoir une expression sous la forme :

$$f(x) = \frac{\alpha}{x + \beta} + \gamma$$

donc sa courbe est une hyperbole (celle de la fonction inverse), translatée et éventuellement dilatée. C'est cette écriture qu'on privilégiera pour étudier le comportement d'une fonction homographique.

Exemple :

Déterminer α, β et γ pour que $f(x) = \frac{2x+1}{3x-1}$ s'écrive $\frac{\alpha}{x+\beta} + \gamma$.

3.4 Valeur absolue d'un réel

Définition 18

La **fonction valeur absolue** est définie sur \mathbb{R} par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

Remarque :

La fonction valeur absolue est dite **affine-par-morceaux**, puisqu'on obtient son graphe comme une concaténation de demi-droites.

3.5 Fonctions puissances et racines n -ièmes.

Définition 19

La **fonction racine carrée** est la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $\forall x \geq 0, f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$.

Remarques :

R1 – La fonction carré n'est pas bijective sur \mathbb{R} (par exemple 4 admet plusieurs antécédents (2 et -2)), mais sa restriction à \mathbb{R}^+ est strictement croissante, donc bijective de \mathbb{R}^+ dans $g(\mathbb{R}^+)$.

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

g est bijective, et sa fonction réciproque est la fonction racine carrée.

R2 – La courbe de la fonction racine carrée est donc la symétrique d'une moitié de parabole.

R3 – Au voisinage de 0, la courbe part dans une direction verticale.

Définition 20

Les **fonctions puissances** sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^n, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

Remarques :

R1 – Les fonctions puissances $x \mapsto x^n$ avec $n \geq 1$ sont toujours strictement croissantes sur \mathbb{R}^+ .

R2 – Les fonctions puissances $x \mapsto x^n$ avec n pair, $n \geq 2$, sont des fonctions paires. Leur courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, et elles sont donc strictement décroissantes sur \mathbb{R}^- , et admettent un minimum en 0.

R3 – Les fonctions puissances $x \mapsto x^n$ avec n impair sont des fonctions impaires. Leur courbe est symétrique par rapport à l'origine, et elles sont donc strictement croissantes sur \mathbb{R} .

Définition 21

Pour n pair non nul, la fonction $x \mapsto x^n$ est bijective de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R}^+ . Sa bijection réciproque est la **fonction racine n -ième** définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

Sa courbe est la symétrique par rapport à la première bissectrice de la courbe de la fonction $x \mapsto x^n$ définie sur \mathbb{R}^+ .

Définition 22

Pour n impair, la fonction $x \mapsto x^n$ est bijective de \mathbb{R} vers \mathbb{R} . Sa bijection réciproque est la **fonction racine n -ième** définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

Sa courbe est la symétrique par rapport à la première bissectrice de la courbe de la fonction $x \mapsto x^n$.

3.6 Fonctions logarithme népérien et exponentielle

Définition 23

La fonction **logarithme népérien**, notée \ln , est définie comme l'unique primitive qui s'annule en 1 de la fonction définie sur \mathbb{R}^{+*} par $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Remarques :

R1 – Par définition, la fonction \ln est définie uniquement sur $]0, +\infty[$.

R2 – Sa dérivée sur \mathbb{R}^{+*} étant la fonction inverse positive, la fonction \ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Définition 24

La fonction $\ln : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bijective : elle admet une fonction réciproque, qu'on appelle la **fonction exponentielle** : $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$. On la note $x \mapsto e^x$ ou $x \mapsto \exp(x)$.

Remarques :

R1 – La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} car \ln l'est sur \mathbb{R}^{+*} .

R2 – Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in]0, +\infty[$, on a :

$$y = e^x \iff x = \ln(y).$$

R3 – La fonction \exp est bijective uniquement si on précise que son ensemble d'arrivée est \mathbb{R}^{+*} .

R4 – Les fonctions \ln et \exp étant réciproques l'une de l'autre, leurs courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

R5 – Les **fonctions puissance réelle** sont des fonctions exponentielles. Si $a > 0$, la fonction :

$$f(x) = a^x$$

est définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a^x = e^{x \ln(a)}$$

On parle parfois de fonction **exponentielle de base a** .

Proposition 25

Inégalités remarquables

Pour tout réel x , on a :

$$e^x \geq x + 1$$

Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\ln(x) \leq x - 1$$

Remarque :

Ces inégalités sont souvent utilisées mais doivent être redémontrées si besoin, en étudiant une fonction adéquate.

3.7 Fonctions trigonométriques

Définition 26

Les fonctions **cosinus** et **sinus**, notées \cos et \sin , sont définies sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Remarques :

R1 – La fonction \cos est paire puisque : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$.

R2 – La fonction \sin est impaire puisque : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$.

R3 – Les fonctions \cos et \sin sont 2π -périodiques.

R4 – $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$. Ainsi, la courbe de la fonction \sin est la translatée de la courbe de la fonction \cos suivant $-\frac{\pi}{2}$.

Définition 27

La fonction **tangente**, notée \tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Remarques :

R1 – La fonction \tan est impaire.

R2 – La fonction \tan est π -périodique.

R3 – La fonction \tan est strictement croissante sur chacun des intervalles sur lesquels elle est définie.

Définition 28

La fonction tangente est strictement croissante sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, à valeurs dans \mathbb{R} . Elle est bijective de $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ vers \mathbb{R} et admet donc une bijection réciproque, appelée **fonction arctangente**, notée Arctan :

$$\operatorname{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\\ x \longmapsto \operatorname{Arctan}(x)$$

Remarques :

R1 – La fonction Arctan et \tan vérifient donc :

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, \operatorname{Arctan}(\tan(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}, \tan(\operatorname{Arctan}(y)) = y$$

R2 – La fonction Arctan est strictement croissante et impaire puisque \tan l'est et en particulier $\operatorname{Arctan}(0) = 0$.

R3 – Puisque $\tan(\pi/4) = 1$ et $\tan(-\pi/4) = -1$, on en déduit que $\operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$ et $\operatorname{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.