CHAPITRE 2

Les nombres réels

"La manière de démontrer est double : l'une se fait par l'analyse ou résolution, et l'autre par la synthèse ou composition." *Descartes*

1 L'ensemble ordonné $(\mathbb{R}, +, \times)$

1.1 Règles et opérations sur les réels

Proposition 1 ***Addition et multiplication***

*L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de deux lois internes : l'**addition** $+$ et la **multiplication** $\times$ vérifiant les propriétés suivantes :*

- ***Commutativité*** *: $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a + b = b + a$ et $ab = ba$*
- ***Associativité*** *: $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ a + (b + c) = (a + b) + c$ et $a(bc) = (ab)c$.*
- ***Distributivité de $\times$ sur $+$*** *: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a(b + c) = ab + ac$ et $(a + b)c = ac + bc$*

Définition 2 **Relation d'ordre**

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une **relation d'ordre** $\leqslant$ vérifiant les propriétés suivantes :

- **Réflexivité** : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant x$
- **Antisymétrie** : $\forall x, y \in \mathbb{R},$ si $(x \leqslant y$ et $y \leqslant x)$ alors $x = y$.
- **Transitivité** : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, si $(x \leqslant y$ et $y \leqslant z)$, alors $x \leqslant z$.

Proposition 3 ***Ordre et addition/multiplication***

La relation d'ordre est compatible avec les opérations de $\mathbb{R}$ au sens suivant :

- $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad x \leqslant y \Longrightarrow x+z \leqslant y+z$
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\forall z \in \boxed{\mathbb{R}^+}, \qquad x \leqslant y \Longrightarrow xz \leqslant yz$
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\forall z \in \boxed{\mathbb{R}^-}, \qquad x \leqslant y \Longrightarrow xz \geqslant yz$

Proposition 4 ***Signe et inverse***

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ *est décroissante sur* $\mathbb{R}_-^*$ *et sur* $\mathbb{R}_+^*$ *:*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \left[0 < x \leqslant y \Longrightarrow \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}\right] \quad et \quad \left[x \leqslant y < 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}\right]$$

1.2 Majorants,Minorants,Max,Min,Sup,Inf

Définition 5

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- M est **un majorant** de A si $\forall x \in A,\ x \leqslant M$.
  La partie A est **majorée** si elle admet au moins un majorant.
- m est **un minorant** de A si $\forall x \in A,\ x \geqslant m$.
  La partie A est **minorée** si elle admet au moins un minorant.

- M est **le maximum** de A si $M \in A$ et si M est un majorant de A.
  On note alors $M = \max(A)$.
- m est **le minimum** de A si $m \in A$ et si m est un minorant de A.
  On note alors $m = \min(A)$.

- On appelle **borne supérieure** de A le plus petit de tous les majorants, s'il existe. Dans ce cas, on le note $\sup(A)$.
- On appelle **borne inférieure** de A le plus grand de tous les minorants de A, s'il existe. Dans ce cas, on le note $\inf(A)$.

Théorème 6 ***Propriété de la borne supérieure/inférieure***

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée possède une borne supérieure.
Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée possède une borne inférieure.

Remarques :

R 1 – Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Si $M = \max(A)$, alors $M = \sup(A)$.
R 2 – Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Si $m = \min(A)$, alors $m = \inf(A)$.

Définition 7

On appelle **intervalle de $\mathbb{R}$** toute partie I de $\mathbb{R}$ « sans trou », i.e. vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad x \leqslant t \leqslant y \Longrightarrow t \in I$$

Remarques :

- **R 1** – Une intersection d'intervalles est encore un intervalle.
- **R 2** – Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont tous les ensembles du type : $\big[a, b\big]$, $\big[a, b\big[$, $\big]a, b\big]$, $\big]a, b\big[$, avec a, b des réels tels que $a \leqslant b$, et éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ en position de « borne ouverte ».

Définition 8

On note parfois $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, la **droite réelle achevée**, où les éléments $+\infty$ et $-\infty$ sont définis par les propriétés suivantes :

- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \ -\infty \leqslant x \leqslant +\infty$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ x + (+\infty) = +\infty$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ x + (-\infty) = -\infty$
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- $\forall x \neq 0, \ x \times (\pm\infty) = \pm\infty$ (d'après règle des signes)
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ \dfrac{x}{\pm\infty} = 0$
- $(\pm\infty) \times (\pm\infty) = \pm\infty$ (d'après règle des signes)

1.3 Valeur absolue d'un réel

Définition 9

Soit x un réel. On appelle **valeur absolue de x**, le réel noté $|x|$, défini par :

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}}.$$

Remarques :

- **R 1** – Pour tout réel x, $|x|$ désigne la partie numérique du réel x, c'est-à-dire la valeur de x sans son éventuel signe
- **R 2** – Pour tout réel x, on a : $|x| = \max(x, \ -x)$.
- **R 3** – Pour tout réel x, on a : $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
- **R 4** – Pour tout $a > 0$, on a : $|x| = a \Longleftrightarrow \quad x = a$ ou $x = -a$.
- **R 5** – Pour tout $a > 0$, on a : $|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$.
- **R 6** – Pour tout $a > 0$, on a : $|x| \geqslant a \iff x \geqslant a$ ou $x \leqslant -a$.

Proposition 10

1. *Soient a et b deux réels. On a :* $\left|a \times b\right| = |a| \times |b|$.
2. *Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$. On a :* $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.
3. *Soit x un réel. On a :* $|x|^2 = \left|x^2\right| = x^2$.
   Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|x^n\right| = |x|^n$.
4. *Pour tous réels a et b, on a :* $a^2 \leqslant b^2 \iff |a| \leqslant |b|$.
5. *Pour tout réel x, on a :* $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

Théorème 11 ***Inégalités triangulaires***

Pour tous réels x et y, on a :

$$\boxed{\Big||x| - |y|\Big| \leqslant \left|x + y\right| \leqslant \left|x\right| + \left|y\right|}$$

Remarques :

R 1 – C'est surtout l'inégalité de droite qui est appelée l'inégalité triangulaire. Celle de gauche étant en fait une conséquence de celle de droite.

R 2 – On peut généraliser cette inégalité :
Pour tous réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a :

$$\boxed{\left|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right| \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|}$$

autrement dit :

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|}$$

2 Puissances et racines

2.1 Puissances entières

Définition 12

Soit $x \in \mathbb{R}$, et soit n un entier naturel. Alors : $x^n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} x = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$.

Par convention, $x^0 = 1$.

Remarque :

On appelle **fonction polynomiale en x de degré n** toute expression du type :

$$\lambda_n x^n + \lambda_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \lambda_1 x + \lambda_0 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k, \quad \text{où } n \in \mathbb{N} \text{ et } \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Exemples :

E 1 – L'expression « $ax + b$ » est une expression polynomiale en x de degré 1.

E 2 – L'expression « $ax^2 + bx + c$ » est une expression polynomiale en x de degré 2 (un trinôme).

Définition 13

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, et soit n un entier naturel. Alors : $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x}$.

Proposition 14

Soient a et b deux réels non nuls et m et n deux entiers relatifs. Alors :

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^m \times b^m = (a \times b)^m$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

Proposition 15

Soit à résoudre l'équation réelle : $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue x, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
On note $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ le ***discriminant du polynôme***

- *Si $\Delta > 0$, alors :*
  - *f s'annule deux fois, en deux* ***racines*** *: $\boxed{x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$ et $\boxed{x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$.*
  - *On peut factoriser f en $\boxed{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$ et f est du signe de a à l'extérieur des racines.*
  - *Remarquons que $\boxed{x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}}$ et $\boxed{x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}}$.*
- *Si $\Delta = 0$, alors :*
  - *f s'annule une seule fois, en $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$*
  - *On peut factoriser f sous la forme $f(x) = a(x - x_0)^2$ et f est du signe de a.*
- *Si $\Delta < 0$, alors :*
  - *f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.*
  - *f est du signe de a et ne s'annule jamais.*

2.2 Racine carrée d'un réel positif, racines n-ièmes d'un réel.

Définition 16

Soit $a \geqslant 0$. La **racine carrée** de a, notée $\sqrt{a}$ est l'unique solution positive de l'équation $x^2 = a$.

Remarques :

- **R 1** – Pour $a \geqslant 0$, on a donc $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.
- **R 2** – Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$
- **R 3** – Pour a et b positifs, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et si $b > 0$, alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
- **R 4** – Si $xy \geqslant 0$, alors $\sqrt{xy} = \sqrt{|x|}\sqrt{|y|}$.

Définition 17

Soit n un entier naturel <u>pair</u>.
Soit $a \geqslant 0$. La **racine n-ième** de a, notée $\sqrt[n]{a}$ est l'unique solution positive de l'équation $x^n = a$.

Soit n un entier naturel <u>impair</u>.
Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel quelconque. La **racine n-ième** de a, notée $\sqrt[n]{a}$ est l'unique solution réelle de l'équation $x^n = a$. Remarquons que a et $\sqrt[n]{a}$ ont toujours le même signe.

Remarques :

- **R 1** – Pour $a \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a donc $(\sqrt[n]{a})^n = a$ et $\sqrt[n]{a^n} = a$.
- **R 2** – Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et n impair, on a aussi $(\sqrt[n]{a})^n = a$ et $\sqrt[n]{a^n} = a$.
- **R 3** – Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et n pair, on a aussi $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.
- **R 4** – Pour a et b positifs, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ et si $b > 0$, alors $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Proposition 18 ***Puissances et ordre***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions puissances n-ième et racines n-ièmes sont croissantes sur $\mathbb{R}^+$. Autrement dit, pour tous réels a et b :

$$0 \leqslant a \leqslant b \Longrightarrow 0 \leqslant a^n \leqslant b^n \qquad \textit{et} \qquad 0 \leqslant a \leqslant b \Longrightarrow 0 \leqslant \sqrt[n]{a} \leqslant \sqrt[n]{b}$$

2.3 Logarithme et exponentielle

Définition 19

La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est l'unique primitive qui s'annule en 1 de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Remarques :

R 1 – Par définition, la fonction ln est définie sur $]0;+\infty[$ et $\boxed{\ln(1) = 0}$.

R 2 – La fonction ln est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\boxed{\forall x > 0, \quad \ln'(x) = \dfrac{1}{x}}$.

R 3 – La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

R 4 – Pour a et b strictement positifs, on a : $\ln(a) = \ln(b) \Longleftrightarrow a = b$ et $\ln(a) < \ln(b) \Longleftrightarrow a < b$ et :

$$\boxed{\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)} \quad \text{et} \quad \boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)}$$

R 5 – Si $xy > 0$, alors $\ln(xy) = \ln|x| + \ln|y|$ et $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln|x| - \ln|y|$.

R 6 – Pour $a > 0$ et x réel $\boxed{\ln(a^x) = x\ln(a)}$.

Définition 20

La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bijective : elle admet une fonction réciproque, qu'on appelle la **fonction exponentielle** : $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$.
On la note $x \mapsto e^x$ ou $x \mapsto \exp(x)$.

Remarques :

R 1 – La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

R 2 – Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)}$

R 3 – La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

R 4 – Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\boxed{y = e^x \Longleftrightarrow x = \ln(y)}$.

R 5 – Pour $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.

R 6 – On a $\boxed{\ln(e) = 1}$, $\boxed{e^1 = e \simeq 2.718}$ et $\boxed{e^0 = 1}$.

R 7 – Pour tous réels a et b, $e^a = e^b \Longleftrightarrow a = b$ et $e^a < e^b \Longleftrightarrow a < b$.

R 8 – Pour tous réels a et b, on a $\boxed{e^{a+b} = e^a e^b}$ et $\boxed{e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}}$

R 9 – Pour tous réels a et b, on a $\boxed{e^{ab} = (e^a)^b = \left(e^b\right)^a}$

R 10 – Pour tout $a > 0$, on a $\boxed{a^x = e^{x\ln(a)}}$.

2.4 Puissance réelle

Définition 21

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Pour tout réel x strictement positif, on définit la **puissance α** de x par : $\boxed{x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}}$.
Par convention, lorsque $\alpha > 0$, on pose que $0^\alpha = 0$.

Remarques :

R 1 – Pour tous réels x et y strictement positifs, on a : $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

R 2 – Pour $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$, on a pour tout $x > 0$, $x^\alpha = x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$

En particulier, on a donc pour tout $x \geqslant 0$: $\boxed{x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}}$.