

CHAPITRE 2

Les nombres réels

”Le livre de l’univers est écrit dans la langue des Mathématiques ”

Galilée

Prerequis

- Utiliser des tableaux

Objectifs

- Manipuler des valeurs absolues
- Résoudre des équations
- Revoir les fonctions de référence

Exercices d’application

- 2, 3, 4, 6, 7, 11, 8, 9, 12, 13 du TD2

1 L’ensemble ordonné $(\mathbb{R}, +, \times)$

1.1 Règles et opérations sur les réels

Proposition 1

Addition et multiplication

L’ensemble \mathbb{R} est muni de deux lois internes : l’**addition** $+$ et la **multiplication** \times vérifiant les propriétés suivantes :

- **Commutativité** : $\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = b + a$ et $ab = ba$
- **Associativité** : $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a + (b + c) = (a + b) + c$ et $a(bc) = (ab)c$.
- **Distributivité de \times sur $+$** : $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a(b + c) = ab + ac$ et $(a + b)c = ac + bc$

Définition 2

Relation d’ordre

L’ensemble \mathbb{R} est muni d’une **relation d’ordre** \leq vérifiant les propriétés suivantes :

- **Réflexivité** : $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$
- **Antisymétrie** : $\forall x, y \in \mathbb{R},$ si $(x \leq y$ et $y \leq x)$ alors $x = y$.
- **Transitivité** : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},$ si $(x \leq y$ et $y \leq z),$ alors $x \leq z$.

Proposition 3*Ordre et addition/multiplication*

La relation d'ordre est compatible avec les opérations de \mathbb{R} au sens suivant :

- $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x \leq y \implies x + z \leq y + z$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall z \in \boxed{\mathbb{R}^+}, \quad x \leq y \implies xz \leq yz$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall z \in \boxed{\mathbb{R}^-}, \quad x \leq y \implies xz \geq yz$

Proposition 4*Signe et inverse*

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur \mathbb{R}_-^* et sur \mathbb{R}_+^* :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left[0 < x \leq y \implies \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \right] \quad \text{et} \quad \left[x \leq y < 0 \implies \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \right]$$

Pensez-y : Visualiser la courbe d'une fonction de référence permet de retrouver ses variations.

1.2 Majorants, Minorants, Max, Min, Sup, Inf**Définition 5**

Soit A une partie de \mathbb{R} .

- M est **un majorant** de A si $\forall x \in A, x \leq M$.
La partie A est **majorée** si elle admet au moins un majorant.
- m est **un minorant** de A si $\forall x \in A, x \geq m$.
La partie A est **minorée** si elle admet au moins un minorant.
- M est **le maximum** de A si $M \in A$ et si M est un majorant de A .
On note alors $M = \max(A)$.
- m est **le minimum** de A si $m \in A$ et si m est un minorant de A .
On note alors $m = \min(A)$.
- On appelle **borne supérieure** de A le plus petit de tous les majorants, s'il existe.
Dans ce cas, on le note $\sup(A)$.
- On appelle **borne inférieure** de A le plus grand de tous les minorants de A , s'il existe. Dans ce cas, on le note $\inf(A)$.

Théorème 6*Propriété de la borne supérieure/inférieure(admis)*

Toute partie de \mathbb{R} non vide et majorée possède une borne supérieure.

Toute partie de \mathbb{R} non vide et minorée possède une borne inférieure.

Remarques :

R1 – Soit A une partie de \mathbb{R} . Si $M = \max(A)$, alors $M = \sup(A)$.

R2 – Soit A une partie de \mathbb{R} . Si $m = \min(A)$, alors $m = \inf(A)$.

Définition 7

On appelle **intervalle de \mathbb{R}** toute partie I de \mathbb{R} « sans trou », i.e. vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad x \leq t \leq y \implies t \in I$$

Remarques :

- R1** – Une intersection d'intervalles est encore un intervalle.
- R2** – Les intervalles de \mathbb{R} sont tous les ensembles du type : $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$, avec a, b des réels tels que $a \leq b$, et éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ en position de « borne ouverte ».

Exemples :

- E1** – Pour $I = [1;6[$, on a $\inf(I) = \min(I) = 1$ et $\sup(I) = 6$. L'intervalle I n'admet pas de maximum.
- E2** – Pour $A = \{\frac{1}{n^2}; n \geq 2\}$, on a $\inf(A) = 0$ et $\sup(A) = \max(A) = \frac{1}{4}$. L'ensemble A n'admet pas de minimum.

Définition 8

On note parfois $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, la **droite réelle achevée**, où les éléments $+\infty$ et $-\infty$ sont définis par les propriétés suivantes :

- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, -\infty \leq x \leq +\infty$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, x + (+\infty) = +\infty$
- $\forall x \in \mathbb{R}, x + (-\infty) = -\infty$
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- $\forall x \neq 0, x \times (\pm\infty) = \pm\infty$
(d'après la règle des signes)
- $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x}{\pm\infty} = 0$
- $(\pm\infty) \times (\pm\infty) = \pm\infty$
(d'après la règle des signes)

1.3 Valeur absolue d'un réel**Définition 9**

Soit x un réel. On appelle **valeur absolue de x** , le réel noté $|x|$, défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Remarques :

- R1** – Pour tout réel x , $|x|$ désigne la partie numérique du réel x , c'est-à-dire la valeur de x sans son éventuel signe.
- R2** – Pour tout réel x , on a : $|x| = \max(x, -x)$.
- R3** – Pour tout réel x , on a : $|x| = 0 \iff x = 0$.
- R4** – Pour tout $a > 0$, on a : $|x| = a \iff x = a$ ou $x = -a$.
- R5** – Pour tout $a > 0$, on a : $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$.
- R6** – Pour tout $a > 0$, on a : $|x| \geq a \iff x \geq a$ ou $x \leq -a$.

Exemple :

$$|x^2 - 9| > 2 \iff x^2 - 9 > 2 \text{ ou } x^2 - 9 < -2 \iff$$

Proposition 10

1. Soient a et b deux réels. On a : $|a \times b| = |a| \times |b|$.
2. Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$. On a : $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$.
3. Soit x un réel. On a : $|x|^2 = |x^2| = x^2$.
Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|x^n| = |x|^n$.
4. Pour tous réels a et b , on a : $a^2 \leq b^2 \iff |a| \leq |b|$.
5. Pour tout réel x , on a : $-|x| \leq x \leq |x|$.

Théorème 11*Inégalités triangulaires*

Pour tous réels x et y , on a :

$$\left| |x| - |y| \right| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

Remarques :

R1 – C'est surtout l'inégalité de droite qui est appelée l'inégalité triangulaire. Celle de gauche étant en fait une conséquence de celle de droite.

R2 – On peut généraliser cette inégalité :
Pour tous réels x_1, x_2, \dots, x_n , on a :

$$\left| x_1 + x_2 + \dots + x_n \right| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

autrement dit :

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$$

2 Puissances et racines

2.1 Puissances entières

Définition 12

Soit $x \in \mathbb{R}$, et soit n un entier naturel. Alors : $x^n = \prod_{k=1}^n x = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}}$.

Par convention, $x^0 = 1$.

Remarque :

On appelle **fonction polynomiale en x de degré n** toute expression du type :

$$\lambda_n x^n + \lambda_{n-1} x^{n-1} + \dots + \lambda_1 x + \lambda_0 = \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k, \quad \text{où } n \in \mathbb{N} \text{ et } \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Exemples :

E1 – L'expression « $ax + b$ » est une expression polynomiale en x de degré 1.

E2 – L'expression « $ax^2 + bx + c$ » est une expression polynomiale en x de degré 2 (un trinôme).

Définition 13

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, et soit n un entier naturel. Alors : $x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{x}$.

Proposition 14

Soient a et b deux réels non nuls et m et n deux entiers relatifs. Alors :

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^m \times b^m = (a \times b)^m$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

Proposition 15

Soit à résoudre l'équation réelle : $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue x , avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant du polynôme**

- Si $\Delta > 0$, alors :

– f s'annule deux fois, il y a deux **racines** : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

– On peut factoriser f : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ et f est du signe de a à l'extérieur des racines.

– On a : $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ et $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$.

- Si $\Delta = 0$, alors :

– f s'annule une seule fois, en $x_0 = \frac{-b}{2a}$

– On peut factoriser f : $f(x) = a(x - x_0)^2$ et f est du signe de a .

- Si $\Delta < 0$, alors :

– f ne s'annule pas sur \mathbb{R} et ne se factorise pas dans \mathbb{R} .

– f est strictement du signe de a .

Exemple :

Dresser le tableau de signes de $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

2.2 Racine carrée d'un réel positif, racines n -ièmes d'un réel.

Définition 16

Soit $a \geq 0$. La **racine carrée** de a , notée \sqrt{a} est l'unique solution positive de l'équation $x^2 = a$.

Remarques :

R1 – Pour $a \geq 0$, on a donc $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.

R2 – Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{x^2} = |x|$

R3 – Pour a et b positifs, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et si $b > 0$, alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

R4 – Si $xy \geq 0$, alors $\sqrt{xy} = \sqrt{|x|}\sqrt{|y|}$.

Définition 17

Soit n un entier naturel pair non nul.

Soit $a \geq 0$. La **racine n -ième** de a , notée $\sqrt[n]{a}$ est l'unique solution positive de l'équation $x^n = a$.

Soit n un entier naturel impair.

Soit a un réel quelconque. La **racine n -ième** de a , notée $\sqrt[n]{a}$, est l'unique solution réelle, du même signe que a , de l'équation $x^n = a$.

Remarques :

R1 – Dans les remarques suivantes, on considère $n \in \mathbb{N}^*$:

Pour $a \geq 0$, on a donc $(\sqrt[n]{a})^n = a$ et $\sqrt[n]{a^n} = a$.

R2 – Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et n impair, on a aussi $(\sqrt[n]{a})^n = a$ et $\sqrt[n]{a^n} = a$.

R3 – Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et n pair, on a aussi $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

R4 – Pour a et b positifs, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ et si $b > 0$, alors $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

R5 – Pour $a > 0$, on note $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Proposition 18

Puissances et ordre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions puissances n -ième et racines n -ièmes sont croissantes sur \mathbb{R}^+ . Autrement dit, pour tous réels a et b :

$$0 \leq a \leq b \implies 0 \leq a^n \leq b^n \quad \text{et} \quad 0 \leq a \leq b \implies 0 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$$

2.3 Logarithme et exponentielle

Définition 19

La fonction **logarithme népérien**, notée \ln , est l'unique primitive qui s'annule en 1 de la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Remarques :

R1 – Par définition, la fonction \ln est définie sur $]0; +\infty[$ et $\boxed{\ln(1) = 0}$.

R2 – La fonction \ln est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\boxed{\forall x > 0, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}}$.

R3 – La fonction \ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

R4 – Pour a et b strictement positifs, on a : $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$ et $\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$ et :

$$\boxed{\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)} \quad \text{et} \quad \boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)}$$

R5 – Si $xy > 0$, alors $\ln(xy) = \ln|x| + \ln|y|$ et $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln|x| - \ln|y|$.

R6 – Pour $a > 0$ et x réel $\boxed{\ln(a^x) = x \ln(a)}$.

Définition 20

La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bijective : elle admet une fonction réciproque, qu'on appelle la **fonction exponentielle** : $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$.

On la note $x \mapsto e^x$ ou $x \mapsto \exp(x)$.

Remarques :

R1 – La fonction exponentielle est définie sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.

R2 – Elle est continue et dérivable sur \mathbb{R} et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)}$

R3 – La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

R4 – Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\boxed{y = e^x \iff x = \ln(y)}$.

R5 – Pour $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.

R6 – On a $\boxed{\ln(e) = 1}$, $\boxed{e^1 = e \simeq 2.718}$ et $\boxed{e^0 = 1}$.

R7 – Pour tous réels a et b , $e^a = e^b \iff a = b$ et $e^a < e^b \iff a < b$.

R8 – Pour tous réels a et b , on a $\boxed{e^{a+b} = e^a e^b}$ et $\boxed{e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}}$

R9 – Pour tous réels a et b , on a $\boxed{e^{ab} = (e^a)^b = (e^b)^a}$

R10 – Pour tout $a > 0$ et pour tout réel x , on a $\boxed{a^x = e^{x \ln(a)}}$.

2.4 Puissance réelle

Définition 21

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pour tout réel x strictement positif, on définit la **puissance** α de x par : $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.

Par convention, lorsque $\alpha > 0$, on pose que $0^\alpha = 0$.

Remarques :

R1 – Pour tous réels x et y strictement positifs, on a : $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$,
 $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

R2 – Pour $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$, on a pour tout $x > 0$, $x^\alpha = x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$

En particulier, on a donc pour tout $x \geq 0$: $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.