CHAPITRE 15

Variables aléatoires réelles discrètes

"La discrétion est une vertu silencieuse." *Louis Deniset*

1 Généralités sur les VAR discrètes

1.1 Définition

Définition 1 — **Variable aléatoire discrète**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle **variable aléatoire réelle discrète** définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ toute application

$$\boxed{X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}}$$

telle que :

- $X(\Omega)$ est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$.
  On a $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, où $I = \mathbb{N}$, ou $I = \mathbb{Z}$, ou I est un ensemble fini,
- Pour tout réel k, $X^{-1}(\{k\}) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = k\}$ est un événement de la tribu $\mathcal{A}$. On note cet événement plus simplement $(X = k)$ ou $[X = k]$.

Remarques :

R 1 – Si on a pris $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, alors toute application de Ω dans $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle.

R 2 – Si X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est un ensemble fini, alors on dit que X est une **variable aléatoire réelle (discrète) finie**.

R 3 – Si X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est dénombrable infini, on dit que X est une **variable aléatoire réelle discrète infinie**.

R 4 – L'ensemble $X(\Omega)$ est appelé le **support de X**, c'est l'ensemble des valeurs prises par X.

R 5 – Pour tout intervalle J de $\mathbb{R}$, on peut définir l'événement $[X \in J]$.

Exemples :

E 1 – Pour tout réel a, on note $[X = a] = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = a\}$

E 2 – Pour tout réel a, on note $[X \leqslant a] = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leqslant a\}$

E 3 – Pour tous réels a et b tels que $a < b$, on note $[a \leqslant X < b] = \{\omega \in \Omega \ / \ a \leqslant X(\omega) < b\}$

Exemples :

E 1 – On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Ω est l'ensemble des cartes, et on choisit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
À chaque carte $\omega \in \Omega$, on associe le réel $X(\omega)$ défini par :
- $X(\omega) = 4$ si ω est un as,
- $X(\omega) = 3$ si ω est un roi,
- $X(\omega) = 2$ si ω est une dame,
- $X(\omega) = 1$ si ω est un valet,
- $X(\omega) = 0$ sinon.

Les valeurs possibles pour $X(\Omega)$ sont donc $0, 1, 2, 3, 4$, ainsi : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

E 2 – Un joueur lance successivement deux dés et note les deux numéros obtenus. L'univers de l'expérience est donc $\Omega = [\![1, 6]\!] \times [\![1, 6]\!] = \{(x, y), x, y \in [\![1, 6]\!]\}$.
On définit la VAR discrète X qui à chaque couple résultat associe la somme des deux nombres obtenus.
Ici, on a $X(\Omega) = \{2, 3, \ldots, 12\}$. Donc X est une VAR discrète finie.

E 3 – On considère une succession infinie de lancers d'une pièce, dont la probabilité de faire Pile vaut p.
On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier Pile, et on note $X = 0$ si on n'obtient jamais Pile.
On suppose qu'il existe bien un modèle $(\Omega, \mathcal{A})$ décrivant cette expérience, de telle sorte que P_n : "on obtient Pile au n-ième lancer" soit un événement.
Ici, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[X = k]$ est un événement de la tribu $\mathcal{A}$ puisque :

$$\forall k \geqslant 1,\ [X = k] = \bigcap_{j=1}^{k-1} \overline{P_j} \cap P_k \in \mathcal{A} \qquad \text{et} \qquad [X = 0] = \bigcap_{j=1}^{+\infty} \overline{P_j} \in \mathcal{A}$$

X est bien une variable aléatoire. Par ailleurs, $X(\Omega) = \mathbb{N}$, donc X est une variable aléatoire discrète infinie.

Remarque :

Dans la pratique, on ne précise pas toujours Ω, mais il est indispensable de préciser $X(\Omega)$.

Proposition 2
Soit X une variable aléatoire réelle discrète telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$.
Alors la famille d'événements $([X = x_i])_{i \in I}$ est un système complet d'événements.

1.2 Loi d'une VAR discrète

Définition 3 — **Loi d'une variable aléatoire discrète**

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On appelle **loi de probabilité** de la VAR discrète X la fonction :

$$\begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ k & \longmapsto & \mathbb{P}([X=k]) \end{array}$$

Déterminer la loi de X consiste donc à donner deux choses :

- $\boxed{X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}}$, l'ensemble des valeurs prises par X,
- pour chaque $k \in X(\Omega)$, déterminer $\boxed{\mathbb{P}([X=k])}$.

Remarques :

R 1 – Pour simplifier les notations, on notera simplement $\mathbb{P}([X=k]) = \mathbb{P}(X=k)$

R 2 – Lorsque $X(\Omega)$ est fini et ne contient pas trop d'éléments, on peut présenter ces résultats sous la forme d'un tableau avec dans la première ligne les valeurs x_i et dans la deuxième ligne $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$.

Exemple :

Reprenons notre jeu de cartes (as = 4 pts, roi = 3 pts, dame = 2 pts, valet = 1 pt, autres = 0 pt).
Déterminons la loi de X.

D'après l'énoncé, $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
L'événement $[X = 1]$ est l'événement "obtenir un valet", donc $\mathbb{P}(X=1) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$
De même, on a $\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(X=4) = \frac{1}{8}$.
L'événement $[X = 0]$ est l'événement "obtenir une carte qui n'est pas un roi, une dame, un valet ou un as". Toutes les cartes ayant la même probabilité d'être choisies et comme il y a 16 cartes correspondant à notre événement, on a : $\mathbb{P}(X=0) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.

Donc, on peut donner la loi de X sous la forme d'un tableau :

x_i	0	1	2	3	4	*total*
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Théorème 4

Soit X une VAR discrète. Si $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, alors $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$.

Proposition 5

Pour toute partie A telle que $A \subset X(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{k \in A} \mathbb{P}(X = k)$$

1.3 Indépendance de variables aléatoires

Remarque :

Rappel : si A et B désignent deux événements de la tribu $\mathcal{A}$, alors :

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants } \iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Définition 6

Soient deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On dit que **les variables X et Y sont indépendantes** si :

$$\boxed{\forall i \in X(\Omega), \forall j \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)}$$

Remarque :

Pour alléger les écritures, on notera plus simplement $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$, la virgule signifiant « et »

Définition 7

Soient n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ définies sur un même espace probabilisé.
On dit que les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si et seulement si, pour toutes parties $A_1 \subset X_1(\Omega), A_2 \subset X_2(\Omega), \ldots, A_n \subset X_n(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}\Big([X_1 \in A_1] \cap [X_2 \in A_2] \cap \cdots \cap [X_n \in A_n]\Big) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1)\mathbb{P}(X_2 \in A_2) \cdots \mathbb{P}(X_n \in A_n)$$

ce qui revient à dire que :

$$\boxed{\forall x_1 \in X_1(\Omega), \ldots, x_n \in X_n(\Omega), \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1)\mathbb{P}(X_2 = x_2) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n)}$$

Remarque :

Pour montrer que deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver un contre-exemple : on cherche deux événements $[X = k]$ et $[Y = \ell]$ qui ne sont pas indépendants (tels que $\mathbb{P}(X = k, Y = \ell) = 0$ alors que $\mathbb{P}(X = k) \neq 0$ et $\mathbb{P}(Y = \ell) \neq 0$).
Pour montrer que deux variables aléatoires sont indépendantes, c'est plus long et difficile en principe, il faut bien vérifier que $[X = k]$ et $[Y = \ell]$ sont indépendants pour tout k et tout ℓ.

Théorème 8 ***Lemme des coalitions***

Si $X_1, X_2, \ldots, X_k, Y_1, Y_2, \ldots, Y_\ell$ sont des variables indépendantes, alors pour toutes fonctions f et g, les deux variables $f(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ et $g(Y_1, Y_2, \ldots, Y_\ell)$ sont indépendantes.

Exemple :

Par exemple, si dans une succession de lancers d'une pièce, une variable X ne dépend que des 10 premiers lancers, et une autre variable Y ne dépend que des lancers 11 à 20, alors X et Y sont indépendantes.

2 Moments d'une VAR discrète

2.1 Espérance

Définition 9

On dit que la variable X **admet une espérance** (ou que **l'espérance de X existe**) lorsque :
- soit $X(\Omega)$ est fini
- soit $X(\Omega)$ est infini et la série $\sum_{k \in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X=k)$ est absolument convergente.

On appelle alors **Espérance mathématique de X** le réel $\mathbb{E}[X]$ défini par

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X=k)}$$

Remarques :

R 1 – $\mathbb{E}[X]$ représente une moyenne des valeurs prises par X, les coefficients étant ici les probabilités respectives de ces valeurs.

R 2 – Lorsque X est une VAR discrète finie, X admet forcément une espérance puisque la somme est finie (aucun problème pour la calculer).

Exemple :

On donne 1€ pour lancer un dé équilibré. Si on fait 1, 2, on ne gagne rien. Si on fait 3 ou 4, on gagne 1€, si on fait 5, on gagne 2€ mais si on fait 6, on gagne 4€.
Soit X la fortune algébrique qu'il nous reste après avoir lancé le dé.
X prend les valeurs -1 (si on fait "1" ou "2"), 0 (si on fait "3" ou "4"), 1 (si on fait "5"), 3 si on fait "6". On a donc $X(\Omega) = \{-1, 0, 1, 2\}$.

x_i	-1	0	1	3
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

X est une VARD finie, donc X admet une espérance. De plus,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X=k) = -1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

On remarque que l'on a $-1 \leqslant \mathbb{E}[X] \leqslant 3$. En effet X prend ses valeurs dans $\{-1, 0, 1, 3\}$ et $\mathbb{E}[X]$ représente le gain moyen si on joue un grand nombre de fois.

Théorème 10 ***Positivité de l'espérance***

- *Si X est une variable aléatoire positive, admettant une espérance, alors :* $\mathbb{E}[X] \geqslant 0$.
- *Si $a \leqslant X \leqslant b$ et X admet une espérance, alors $a \leqslant \mathbb{E}[X] \leqslant b$.*

Remarque :

Si X est une variable aléatoire positive, telle que $\mathbb{E}[X] = 0$, alors presque-sûrement, $X = 0$, autrement dit $\mathbb{P}(X = 0) = 1$.

Théorème 11 ***Théorème de transfert***

Soit X une variable aléatoire discrète. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie au moins sur l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X. Alors la VAR $g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \in X(\Omega)} g(k)\mathbb{P}(X = k)$ converge absolument, et dans ce cas :

$$\boxed{\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \sum_{k \in X(\Omega)} g(k)\mathbb{P}(X = k)}$$

Remarque :

Si X ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors toute fonction de X est encore une variable aléatoire et admet bien une espérance (la somme est finie, donc elle a bien un sens).

Exemple :

On reprend notre jeu précédent, et on considère à présent la variable $Z = 2X^2 - 1$. Calculons $\mathbb{E}[Z]$.
Comme X est une VARD finie, Z est également une VARD finie donc Z admet bien une espérance. D'après le Théorème de Transfert, on a :
E[Z] $= \text{E}\left[2X^2 - 1\right] = \sum_{k \in X(\Omega)} (2k^2 - 1)\mathbb{P}(X = k) = \left(2(-1)^2 - 1\right)\frac{1}{3} + (2(0)^2 - 1)\frac{1}{3} + \left(2(1)^2 - 1\right)\frac{1}{6} + \left(2(3)^2 - 1\right)\frac{1}{6}$
$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{17}{6} = 3$

Corollaire 12 ***Linéarité de l'espérance, 1ère forme***

Si X admet une espérance, alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, la variable $aX + b$ admet une espérance et :

$$\boxed{\mathbb{E}\left[aX + b\right] = a\mathbb{E}[X] + b}$$

Définition 13

Si X est une variable aléatoire admettant une espérance nulle, i.e. si

$$\mathbb{E}[X] = 0$$

on dit que X est une **variable centrée**.

Remarque :

Soit X une VAR discrète admettant une espérance $\mathbb{E}[X]$. Alors la variable aléatoire $X - \mathbb{E}[X]$ est une VAR discrète centrée, appelée la **variable aléatoire centrée associée à la variable X**.

Théorème 14 ***Théorème de transfert pour deux variables***

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie au moins sur $(X, Y)(\Omega)$ des couples de valeurs prises par X et Y. Alors la VAR $g(X, Y)$ admet une espérance si et seulement si la somme double $\sum_{\substack{i \in X(\Omega)\\ j \in Y(\Omega)}} g(i, j)\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$ converge absolument, et dans ce cas :

$$\mathbb{E}\left[g(X, Y)\right] = \sum_{\substack{i \in X(\Omega)\\ j \in Y(\Omega)}} g(i, j)\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$$

Exemples :

E 1 – $\mathbb{E}[X+Y] = \sum\limits_{\substack{i\in X(\Omega)\\ j\in Y(\Omega)}} (i+j)\mathbb{P}(X=i, Y=j)$

E 2 – $\mathbb{E}[XY] = \sum\limits_{\substack{i\in X(\Omega)\\ j\in Y(\Omega)}} (ij)\mathbb{P}(X=i, Y=j)$

Corollaire 15 ***Linéarité de l'espérance, 2ème forme***

Si X et Y admettent une espérance, alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, la variable $aX+bY$ admet une espérance et :

$$\boxed{\mathbb{E}\left[aX+bY\right] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]}$$

Proposition 16 ***Espérance du produit de variables indépendantes***

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes admettant une espérance, alors XY admet une espérance et :

$$\boxed{\mathbb{E}\left[XY\right] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}$$

2.2 Moment d'ordre m

Définition 17
Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Si la variable aléatoire X^m admet une espérance, alors on dit que **la variable X admet un moment d'ordre m** qui est le réel

$$\mathbb{E}\left[X^m\right] = \sum_{k \in X(\Omega)} k^m \mathbb{P}(X = k) \quad \text{(si convergence absolue)}$$

Remarques :

- **R 1** – Le moment d'ordre 1 est donc l'espérance de X.
- **R 2** – Si X est une VAR discrète finie, elle admet un moment de tout ordre $m \geqslant 1$.

Théorème 18 — ***Inégalité de Cauchy-Schwarz***
Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors X admet un moment d'ordre 1 et on a :

$$\mathbb{E}[X]^2 \leqslant \mathbb{E}[X^2]$$

Remarque :

La réciproque n'est pas forcément vraie, une variable admettant un moment d'ordre 1 n'admet pas forcément de moment d'ordre 2

Proposition 19
Soit $m \geqslant 1$. Si X admet un moment d'ordre m, alors X admet des moments d'ordre s pour n'importe quel $s \in [\![1, m]\!]$.

2.3 Variance et écart-type

Définition 20
Soit X une VAR discrète admettant une espérance et telle que la variable $X - \mathbb{E}[X]$ admet un moment d'ordre 2.
On appelle alors **variance de la variable X** le réel :

$$\mathbb{V}[X] = \boxed{\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]}$$

De plus, lorsque $\mathbb{V}(X)$ existe, on appelle **écart-type de X** le réel

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}[X]}}$$

Remarques :

- **R 1** – Si X est une VAR discrète finie, alors X admet bien entendu une variance.
- **R 2** – Si X n'admet pas d'espérance, X ne peut pas admettre de variance.
- **R 3** – La variance mesure la dispersion de la variable X par rapport à sa moyenne $\mathbb{E}[X]$.
- **R 4** – Si une variable a une variance nulle, alors elle est constante presque-sûrement (et elle est presque-sûrement toujours égale à son espérance).

Théorème 21 ***Formule de König-Huygens***

Soit X une VAR discrète. Alors

$$\mathbb{V}[X] \text{ existe} \iff \mathbb{E}[X^2] \text{ existe}$$

Et en cas d'existence, on a :

$$\boxed{\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2}$$

Exemple :

Reprenons le cas du jeu de dés page 5. On avait calculé $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{3}$. De plus, $\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k \in X(\Omega)} k^2 \mathbb{P}(X = k) = (-1)^2 \frac{1}{3} + 0^2 \frac{1}{3} + 1^2 \frac{1}{6} + 3^2 \frac{1}{6} = 2$. Ainsi $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = 2 - \frac{1}{9} = \frac{17}{9}$.

Proposition 22 ***Propriété quadratique de la variance***

Soit X une VAR discrète admettant une variance. Alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, la variable $aX + b$ admet également une variance et :

$$\mathbb{V}[aX + b] = a^2 \mathbb{V}[X]$$

Proposition 23

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes admettant des variances, alors on a :

$$\mathbb{V}[X + Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y]$$

Remarque :

Finalement, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes admettant des variances, alors on a :

$$\mathbb{E}[X_1 X_2 \cdots X_n] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] \cdots \mathbb{E}[X_n] \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \mathbb{V}[X_1] + \mathbb{V}[X_2] + \cdots + \mathbb{V}[X_n]$$

2.4 Inégalités de concentration

Théorème 24 ***Inégalité de Markov***

Si X est une variable aléatoire discrète à valeurs positives admettant une espérance, alors :

$$\forall a > 0,\ \mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$$

Théorème 25 ***Inégalité de Bienaymé-Tchebychev***

Si X est une variable aléatoire discrète possédant une variance, alors :

$$\forall a > 0,\ \mathbb{P}\Big(|X - \mathbb{E}[X]| \geqslant a \Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}[X]}{a^2}$$

Remarque :

La probabilité que X s'éloigne de plus de a de son espérance est d'autant plus petite que a est grand. Cela montre qu'une variable aléatoire prendra, avec une grande probabilité une valeur relativement proche de son espérance.

2.5 Covariance de deux variables aléatoires discrètes

Définition 26
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2.
On appelle **covariance de X et de Y** le nombre réel défini par

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}\Big[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\Big]}$$

ce qui revient à :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}$$

Remarques :

- **R 1** – La covariance est symétrique, on a : On a $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$
- **R 2** – Pour toute variable aléatoire X admettant un moment d'ordre 2, on a $\mathrm{Cov}(X,X)=\mathbb{V}[X]$.

Théorème 27

$$X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \Longrightarrow Cov(X,Y)=0$$

Remarque :

La réciproque est fausse !
Il est possible qu'on ait $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ et que les variables X et Y ne soient pas indépendantes.
Cependant, si $\mathrm{Cov}(X,Y)\neq 0$, on est certain que X et Y ne sont pas indépendantes.

Définition 28 **Variables non corrélées linéairement**
Si X et Y sont deux variables aléatoires telles que

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$$

on dit que **les variables X et Y sont non corrélées linéairement**.

Proposition 29 ***Bilinéarité de la covariance***
*La covariance est **bilinéaire**, i.e. linéaire par rapport à chacune de ses variables.*
Autrement dit, pour toutes variables X_1 et X_2, Y_1 et Y_2 admettant des moments d'ordre 2 et pour tous réels a, b, on a :

$$Cov(aX_1+bX_2,Y)=a\ Cov(X_1,Y)+b\ Cov(X_2,Y)$$

$$Cov(X,aY_1+bY_2)=a\ Cov(X,Y_1)+b\ Cov(X,Y_2)$$

Théorème 30 ***Inégalité de Cauchy-Schwarz***
Si X et Y admettent un moment d'ordre deux, alors :

$$\boxed{(Cov(X,Y))^2\leqslant \mathbb{V}[X]\mathbb{V}[Y]}$$

Définition 31

Soient X et Y deux VAR discrètes d'écart-type non nul.
On appelle **coefficient de corrélation linéaire de X et Y** le réel :

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Remarque :

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\rho(X,Y)$ est toujours compris entre -1 et 1.
De plus, $\rho(X,Y) = \pm 1$ si et seulement si la famille (X,Y) est liée.

Théorème 32

Pour toutes variables X et Y admettant un moment d'ordre 2, alors $X+Y$ admet une variance et

$$\boxed{\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\ Cov(X,Y)}$$

De plus, si X et Y sont indépendantes,

$$\boxed{\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y]}$$

Remarques :

R 1 – Plus généralement, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des VAR discrètes admettant toutes un moment d'ordre 2, alors la variable $X_1 + \cdots + X_n$ admet également une variance et

$$\mathbb{V}[X_1 + \cdots + X_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}[X_i] + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

R 2 – De plus, rappelons que si les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors on a

$$\mathbb{V}[X_1 + \cdots + X_n] = \mathbb{V}[X_1] + \mathbb{V}[X_2] + \cdots + \mathbb{V}[X_n]$$