CHAPITRE 14

Espaces probabilisés

"Il est plus difficile de désagréger un préjugé qu'un atome. " *Einstein*

1 Vocabulaire

1.1 Définitions et exemples

Définition 1
Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat ne peut pas être déterminé a priori, il dépend du hasard.

Exemple :

> On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note le résultat. On effectue ainsi une expérience aléatoire.

Définition 2
L' **univers** (ou **univers des possibles**, ou **univers des résultats observables**) de l'expérience aléatoire est l'ensemble Ω des **issues** ou résultats possibles de l'expérience. Les éléments de Ω se notent souvent ω. On note $Card(\Omega)$ le nombre d'éléments dans Ω.

Exemples :

> **E 1** – On lance un dé. L'univers de l'expérience peut être noté : $\Omega = [\![1, 6]\!]$ et $Card(\Omega) = 6$.
>
> **E 2** – On lance une pièce. L'univers peut être noté par exemple $\Omega = \{\text{Pile}, \text{ Face}\}$, ou bien $\Omega = \{P, F\}$, ou bien $\Omega = \{0, 1\}$ ..., et dans tous les cas $Card(\Omega) = 2$.
>
> **E 3** – Si on lance trois fois un dé à six faces et que l'on note les trois résultats, on réalise une expérience dont l'univers est $\Omega = \{(x, y, z) \ / \ x, y, z \in [\![1, 6]\!]\}$, et dans ce cas $Card(\Omega) = 6 \times 6 \times 6 = 216$.
>
> **E 4** – On choisit simultanément 5 cartes dans un jeu de 32 cartes, l'univers est alors l'ensemble des sous-ensembles de 5 éléments (sans ordre) parmi les 32 cartes : $\Omega = \{A \subset [\![1, 32]\!], \ Card(A) = 5\}$.

Remarquons qu'ici, $Card(\Omega)$ est plus délicat à dénombrer (cf plus tard).

E 5 – Si on choisit au hasard un réel compris entre 0 et 1, l'univers de l'expérience est $\Omega = [0, 1]$. Ici, Ω est infini (il n'a donc pas de cardinal).

Définition 3
On appelle **événement** toute partie de l'univers Ω de l'expérience aléatoire.

Remarques :

R 1 – Lorsqu'on effectue une expérience aléatoire, un événement est un fait lié à cette expérience, pouvant se produire ou non. On peut dire, après avoir réalisé l'expérience, si cet événement est réalisé ou non.

R 2 – L'ensemble des événements est donc l'ensemble des parties de Ω, il est noté $\mathcal{P}(\Omega)$. On rappelle que si $Card(\Omega) = n$ alors $Card(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^n$.

Exemples :

E 1 – On lance un dé et on regarde le résultat. On obtient un nombre $\omega \in [\![1, 6]\!]$.
- L'événement $A_1 =$« obtenir un nombre pair » est réalisé si et seulement si $\omega \in \{2, 4, 6\}$.
  On écrit donc alors : $A_1 = \{2, 4, 6\}$.
- L'événement $A_2 =$« obtenir le nombre 4 » est réalisé si et seulement si $\omega = 4$.
  On écrit donc $A_2 = \{4\}$.
- L'événement $A_3 =$« obtenir un nombre supérieur ou égal à 4 » est réalisé si et seulement si $\omega \in \{4, 5, 6\}$. On note donc $A_3 = \{4, 5, 6\}$.
- Chaque événement de l'expérience est bien représenté par une partie de l'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

E 2 – On lance un dé et on regarde si le résultat est pair ou impair. Cette fois, l'univers de l'expérience est $\Omega = \{\text{pair}, \text{ impair}\}$.
- L'événement $A_1 =$« obtenir un nombre pair » est lié à cette expérience, et $A_1 = \{\text{pair}\}$.
- Les événements A_2 et A_3 ne sont pas liés à cette expérience aléatoire, car on ne peut pas dire s'ils sont réalisés ou non avec notre univers Ω.
- Chaque événement de l'expérience est représenté par une partie de l'ensemble $\Omega = \{\text{pair}, \text{ impair}\}$.

E 3 – On lance deux fois de suite un dé. On obtient un couple $(\omega_1, \omega_2) \in [\![1, 6]\!]^2$.
- L'événement $B_1 =$« la somme des deux nombres vaut 5 » est représenté par :

$$B_1 = \{(1, 4); (2, 3); (3, 2); (4, 1)\}.$$

- Chaque événement de l'expérience peut être représenté par une partie de l'ensemble $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$.

Définition 4
Soit une expérience aléatoire, dont l'univers des possibles est noté Ω.
- Un événement qui est toujours réalisé est appelé un **événement certain**, il est donc représenté par l'ensemble Ω
- Un événement qui n'est jamais réalisé est appelé un **événement impossible**, il est représenté par l'ensemble vide $\emptyset$.
- Un événement qui est constitué d'une seule issue est représenté par un singleton $\{\omega\}$ et appelé **événement élémentaire**.

Exemples :

E 1 – Lorsqu'on lance un dé, l'événement « on obtient 5 » est un événement élémentaire.

E 2 – Lorsqu'on lance deux fois de suite un dé, l'événement $B_2 =$« la somme des deux dés vaut au moins 2 » est certain. On a donc $B_2 = \Omega$. En revanche, l'événement $B_3 =$« la somme des deux dés vaut au moins 13 » est impossible. On a donc $B_3 = \emptyset$.

1.2 Langage des événements

On se fixe une expérience aléatoire, dont l'univers est Ω et on considère deux événements A et B liés à cette expérience (A et B sont des parties de l'univers : $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$). Soit $\omega \in \Omega$ le résultat de cette expérience aléatoire.

Définition 5

- On définit l'**événement contraire de** A, noté $\overline{A}$ par :

$$\overline{A} \text{ est réalisé } \iff A \text{ n'est pas réalisé}$$

Autrement dit, $\omega \notin A \iff \omega \in \overline{A}$.
On a donc $\boxed{\overline{A} = \Omega \setminus A}$ (on lit " Ω privé de A").

- On définit **l'événement « A ou B »** par :

$$A \text{ ou } B \text{ est réalisé } \iff \text{ au moins l'un des événements } A \text{ ou } B \text{ est réalisé}$$

Autrement dit, « A ou B » est réalisé $\iff \omega \in A$ ou $\omega \in B \iff \omega \in A \cup B$.
L'événement « A ou B » est donc représenté par $\boxed{A \cup B}$.

- On définit **l'événement « A et B »** par :

$$A \text{ et } B \text{ est réalisé } \iff A \text{ et } B \text{ sont réalisés simultanément}$$

Autrement dit, « A et B » est réalisé $\iff \omega \in A$ et $\omega \in B \iff \omega \in A \cap B$.
L'événement « A et B » est donc représenté par $\boxed{A \cap B}$.

- Les événements A et B sont dits **incompatibles** ou **disjoints** s'ils ne peuvent pas être réalisés simultanément, c'est-à-dire si $\boxed{A \cap B = \emptyset}$.
En particulier, deux événements contraires sont incompatibles.

- On définit **l'événement « A mais pas B »** , noté $A \setminus B$ (ou $A - B$) par :

$$A \setminus B \text{ est réalisé } \iff A \text{ est réalisé, mais } B \text{ non.}$$

Autrement dit, $A \setminus B$ est réalisé $\iff \omega \in A$ et $\omega \notin B \iff \omega \in A \cap \overline{B}$.
L'événement $A \setminus B$ est donc représenté par $\boxed{A \setminus B = A \cap \overline{B}}$.

- On dit que **« l'événement A implique l'événement B »** si la réalisation de A entraîne la réalisation de B.
Ainsi, « A implique B » signifie que : $\Big(\omega \in A \Longrightarrow \omega \in B\Big)$, autrement dit que $\boxed{A \subset B}$.

Remarque :

On peut définir la réunion ou l'intersection de plus de deux événements, voire d'une infinité d'événements (si Ω est infini par exemple). En général, on note par I un ensemble dénombrable (soit un ensemble fini, une partie de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{Z}$, tous les éléments pouvant être numérotés). On peut alors définir :

$$\boxed{\bigcup_{i\in I} A_i \text{ est réalisé } \iff \exists i \in I \ / \ A_i \text{ réalisé}} \quad \text{et} \quad \boxed{\bigcap_{i\in I} A_i \text{ est réalisé } \iff \forall i \in I \ / \ A_i \text{ réalisé}}$$

Définition 6

Soit I un ensemble dénombrable. On considère $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements (finie ou infinie) définis sur une même expérience aléatoire.
On dit que $(A_i)_{i\in I}$ **est un système complet d'événements** si :

- $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$
- pour tous $i, j \in I$ tels que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Exemples :

E 1 – Si A est un événement quelconque, $(A, \overline{A})$ forme toujours un système complet d'événements.

E 2 – On lance un dé, avec comme univers $\Omega = [\![1, 6]\!]$. Si on note :
$A_1 =$ « le nombre obtenu est pair »
$A_2 =$ « on obtient 1 »
$A_3 =$ « on obtient un nombre impair supérieur à 2 »
Alors, (A_1, A_2, A_3) est un système complet d'événements.

1.3 Tribu des événements

On considère une expérience aléatoire, et Ω l'univers correspondant. On veut définir un cadre pour décrire les événements liés à l'expérience. Mais, tous les événements ne sont pas forcément intéressants à étudier (notamment lorsque Ω est infini).
On veut simplement que les opérations sur les événements qu'on a décrites précédemment donnent encore des événements.
Par ex : si A et B sont des événements, alors « A ou B » doit encore être un événement.

Définition 7
Soit Ω un ensemble et soit $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de Ω.
On dit que **$\mathcal{A}$ est une tribu d'événements sur Ω** si :

- (i) $\Omega \in \mathcal{A}$ et $\emptyset \in \mathcal{A}$
- (ii) $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire : si $A \in \mathcal{A}$, alors $\overline{A} \in \mathcal{A}$
- (iii) $\mathcal{A}$ est stable par union finie ou dénombrable : pour tout ensemble I fini ou dénombrable, si $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{A}$, alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$
- (iv) $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie ou dénombrable : pour tout ensemble I fini ou dénombrable, si $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{A}$, alors $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$

Exemples :

- **E 1** – Si Ω est un ensemble, alors $\mathcal{P}(\Omega)$ (l'ensemble des parties possibles de Ω) est une tribu de Ω (c'est la plus grosse possible).
  Remarque : si Ω est de cardinal n, alors $\mathcal{P}(\Omega)$ est de cardinal 2^n, donc il y a beaucoup d'événements possibles, et cela augmente très vite dès que n augmente.
- **E 2** – Si Ω est un ensemble, et $A \subset \Omega$, $A \neq \emptyset$, $A \neq \Omega$, alors $\{\emptyset, \Omega, A, \overline{A}\}$ est une tribu de Ω.

Définition 8
Soit une expérience aléatoire, et soit Ω l'univers correspondant.
Si $\mathcal{A}$ est une tribu d'événements sur Ω, alors on dit que **$(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable (sur lequel on peut définir une probabilité)** .

2 Espaces probabilisés

2.1 Probabilité

Définition 9
Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, lié à une expérience aléatoire.
On appelle **probabilité sur** $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application :

$$\mathbb{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$$

qui vérifie :
(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
(ii) la propriété de **σ-additivité** : si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille (finie ou dénombrable) d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux incompatibles, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ s'appelle alors un **espace probabilisé** et pour tout événement A dans la tribu $\mathcal{A}$, le réel $\mathbb{P}(A)$ est la **probabilité de l'événement** A.

Proposition 10 ***Propriétés d'une probabilité***
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé , et soient A et B deux événements. Alors on a :

1. *Si A et B sont* ***incompatibles*** *(i.e. $A \cap B = \emptyset$) alors on a :* $\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)}$
2. *Pour tout événement A de la tribu $\mathcal{A}$:*
$$\boxed{\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)}$$
3. $\mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 0$
4. $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$
5. *Si $B \subset A$, alors* $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$
6. *Si $A \subset B$, alors* $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$
7. *Si A et B sont quelconques alors :*
$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}$$
On a donc toujours : $\mathbb{P}(A \cup B) \leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Théorème 11 ***Formule des probabilités totales***
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, I un ensemble fini ou dénombrable et soit $(B_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements.
Alors pour tout événement A de $\mathcal{A}$, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \cap B_i)}$$

Remarque :

Si $(B_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements, alors on a nécessairement $\sum_{i\in I} \mathbb{P}(B_i) = 1$.

2.2 Un cas particulier : si Ω est fini et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, l'équiprobabilité

Dans tout ce paragraphe, on suppose que Ω est un ensemble fini de cardinal n :

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

On prend alors $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ comme tribu d'événements (on les prend tous !). Comment définir une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$?

Proposition 12

- *Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, alors on a* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = 1$.
- *Soient $p_1, p_2, \dots, p_n$ des réels positifs tels que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$. *Alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que :*
$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = p_k.$$
Dans ce cas, si $A = \{x_1, x_2, \dots, x_s\} \in \mathcal{A}$, alors $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{k=1}^{s} \mathbb{P}(\{x_k\})$.

Remarque :

Avec le théorème précédent, définir une probabilité, cela revient à connaître la probabilité de chaque événement élémentaire.
Et définir une probabilité sur chacun des événements élémentaires $\{\omega_1\}, \dots, \{\omega_n\}$ revient à choisir une liste $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ de n réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ (en posant ensuite que $\mathbb{P}(\{\omega_k\}) = p_k$).

Exemple :

Il est possible d'imaginer une expérience où on lance un dé, et les probabilités respectives d'obtenir les 6 faces sont (0.1, 0.2 ,0.1 ,0.3 ,0.1 ,0.2).

Définition 13

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. On dit que deux événements sont **équiprobables** s'ils ont la même probabilité.
2. Une probabilité $\mathbb{P}$ est dite **uniforme** si tous les événements élémentaires sont équiprobables. On est alors en **situation d'équiprobabilité**.

Théorème 14 ***Formule dans le cas d'équiprobabilité***

Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un ensemble fini (de cardinal n) muni d'une probabilité uniforme. Alors :

- *Pour chaque issue ω_k de l'expérience, on a :* $\boxed{\mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \dfrac{1}{n}}$.
- *Pour chaque événement A de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, on a :*

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{\textit{Nombre de cas favorables à } A}{\textit{Nombre de cas total}}}$$

Remarque :

Dans le modèle d'équiprobabilité, calculer la probabilité d'un événement A revient donc à un problème de dénombrement des différents cas favorables à cet événement A.

Exemples :

E1 – On lance un dé équilibré. On a $\Omega = [\![1,6]\!]$.
Les événements élémentaires sont alors tous équiprobables et on a :

$$\forall k \in [\![1,6]\!],\ \mathbb{P}(\text{ « on obtient } k \text{ »}) = \frac{1}{6}$$

E2 – On lance deux dés équilibrés. On a $\Omega = \{(i,j),\ i,j \in [\![1,6]\!]\}$
Les événements élémentaires sont alors tous équiprobables, et on a :

$$\forall (i,j) \in [\![1,6]\!],\ \mathbb{P}(\text{« on obtient } (i,j) \text{ »}) = \frac{1}{36}$$

E3 – On lance deux dés équilibrés discernables et on veut que la somme des dés fasse 6.
Si on prend comme résultat de l'expérience la somme des deux dés, on a $\Omega = \{2, 3, \ldots, 12\}$ mais les événements ne sont pas équiprobables.
Si on prend comme résultat de l'expérience le couple formé des deux nombres obtenus, alors $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ et il y a bien équiprobabilité. Dans ce cas, on a :

$$A = \{(x,y)\ /\ x + y = 6\} = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$$

On a donc $Card(A) = 5$, donc $\mathbb{P}(A) = \dfrac{5}{36}$.

2.3 Dénombrements usuels

Définition 15
Soit p un entier naturel et E un ensemble.

Une p-liste d'éléments de E est un p-uplet d'éléments de E. Il y a ordre et répétition possible.

Si $Card(E) = n$ alors une **permutation** est une n-liste d'éléments **distincts** de E. Il y a ordre mais pas de répétition.

Une **combinaison** de p éléments de E est une partie de E à p éléments. Il y a **ni ordre ni répétition**.

Remarques :

R1 – Si F est un ensemble de cardinal p alors se donner une p-liste revient à se donner une application de F dans E donc il y a n^p p-listes possibles. (ex. : p tirages successifs dans E avec remise)

R2 – Si tous les éléments sont distincts (pas de répétition possible) alors cela revient à se donner une implication injective et il y a $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ possibilités. (ex. : p tirages successifs dans E sans remise)

R3 – Se donner une permutation revient à se donner une application bijective et il y a $n!$ possibilités.(ex. : n tirages successifs dans E sans remise jusqu'à épuisement du stock)

R4 – Il y a $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ combinaisons possibles. (ex. : tirage simultané de p éléments dans E)

2.4 Le cas où Ω est infini dénombrable

Lorsque Ω est infini, on a alors une infinité d'événements élémentaires. On suppose ici que Ω est dénombrable (indexé par $\mathbb{N}^*$) :

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \} = \{\omega_k, k \in \mathbb{N}^*\}$$

On prend alors $\mathcal{A}$ une tribu d'événements.Comment définir une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$?

Proposition 16

- *Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, alors on a* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = 1$.
- *Soit $(p_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum p_n$ converge et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$. Alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = p_k$.*
  Dans ce cas, si $A = \{x_1, x_2, \dots, x_s\} \in \mathcal{A}$, alors $\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{s} \mathbb{P}(\{x_k\})$.

Remarque :

Avec le théorème précédent, définir une probabilité, cela revient à connaître la probabilité de chaque événement élémentaire.
Et définir une probabilité sur une infinité d'événements élémentaires revient à choisir une suite infinie de réels positifs dont la somme converge et vaut 1.

Exemple :

On sait que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Il est possible d'imaginer une expérience où on choisirait un entier $n \geqslant 1$ au hasard, (avec donc $\Omega = \mathbb{N}^*$) de manière à ce que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Ce modèle a un sens.

Définition 17

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On dit que (A_n) est une **suite croissante d'événements** de $\mathcal{A}$ lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}.$$

On dit que (A_n) est une **suite décroissante d'événements** de $\mathcal{A}$ lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n.$$

Théorème 18 — ***Théorème de la limite monotone***

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. *Si (A_n) est une suite croissante d'événements de $\mathcal{A}$, alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

2. *Si (A_n) est une suite décroissante d'événements de $\mathcal{A}$, alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Exemple :

On considère une infinité de lancers d'une pièce équilibrée.
On peut donc modéliser l'univers par $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble de toutes les suites à valeurs dans $\{P, F\}$.

Soit B l'événement « ne jamais obtenir de Pile ».
Notons les événements : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n$: « ne pas obtenir de Pile au cours des n premiers lancers ».
Alors, on a

$$B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$$

De plus, on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{2^n}$$

et ne pas obtenir de Pile au cours des $n+1$ premiers lancers, implique en particulier que l'on n'a pas obtenu de Pile au cours des n premiers lancers : donc $B_{n+1} \subset B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et la suite d'événements (B_n) est donc décroissante pour l'inclusion.
D'après le Théorème de Limite Monotone, $\mathbb{P}(B) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B_n)$. D'où

$$\mathbb{P}\left(\text{ « ne jamais obtenir une Pile »}\right) = 0$$

Soit C l'événement « obtenir au moins une fois un Pile ».
Méthode 1 :
Notons les événements : $\forall n \in \mathbb{N}^*, C_n$: « obtenir au moins une fois un Pile au cours des n premiers lancers ».
Alors, on a

$$C = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n$$

De plus, on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(\overline{B_n}) = 1 - \mathbb{P}(B_n) = 1 - \frac{1}{2^n}$$

et obtenir un Pile au cours des n premiers lancers, implique en particulier d'obtenir un Pile au cours des $n+1$ premiers lancers : donc $C_n \subset C_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et la suite d'événements (C_n) est donc croissante pour l'inclusion.
D'après le Théorème de Limite Monotone, $\mathbb{P}(C) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(C_n)$. D'où

$$\mathbb{P}\left(\text{ « obtenir au moins une fois un Pile »}\right) = 1$$

Méthode 2 : On peut remarquer que $C = \overline{B}$

Définition 19

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, où Ω est infini, et soit A un événement.
- Si $\mathbb{P}(A) = 0$, on dit que A est un **événement négligeable** (ou quasi-impossible).
- Si $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que A est un **événement presque-sûr** (ou quasi-certain).

Exemple :

Dans l'exemple précédent, l'événement B est négligeable (quasi-impossible) et l'événement C est presque-sûr (quasi-certain).

Conséquence 20

Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, où Ω est infini, et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{A}$, alors on a toujours :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N} A_k\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{N} A_k\right)$$

Définition 21

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, où Ω est infini, et $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements de $\mathcal{A}$.
On dit que $(A_i)_{i\in I}$ **est un système quasi-complet d'événements de Ω** si :

(i) Les événements A_i sont deux à deux incompatibles.

$$\forall i, j \in I, \text{ si } i \neq j, \text{ alors } A_i \cap A_j = \emptyset$$

(ii)

$$\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$$

Remarque :

> Dans un espace probabilisé infini, certains événements sont possibles, mais négligeables (de probabilité nulle). La définition de système quasi-complet d'événements permet de ne pas prendre en compte ces événements.

Théorème 22 ***Formule des probabilités totales***

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et soit $(B_i)_{i\in I}$ un système quasi-complet d'événements.
Alors pour tout événement A de $\mathcal{A}$, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \cap B_i)}$$

3 Conditionnement et indépendance

3.1 Probabilité conditionnelle

Définition 23
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit B un événement de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle.
Pour tout événement A de $\mathcal{A}$, on définit la **probabilité (conditionnelle) de A sachant B** par :

$$\boxed{\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

Proposition 24
La fonction $\mathbb{P}_B : \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}_B(A) \end{array}$ *est encore une probabilité.*

Remarque :

En particulier, puisque $\mathbb{P}_B$ est une probabilité, on peut appliquer à nouveau toutes les formules vues précédemment.

Par exemple, si $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et B un événement de probabilité non nulle, alors :
- $\forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}_B(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}_B(A)$
- Si A_1 et A_2 sont deux événements, on a $\mathbb{P}_B(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}_B(A_1) + \mathbb{P}_B(A_2) - \mathbb{P}_B(A_1 \cap A_2)$.

Proposition 25
Pour tous événements A et B de probabilité non nulle, on a donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)}$$

Définition 26
Si A et B sont deux événements de $\mathcal{A}$, on dit que **A et B sont indépendants** si :

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}$$

Remarques :

R 1 – Si B est de probabilité non nulle, alors A et B indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)$.

R 2 – Si A est de probabilité non nulle, alors A et B indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)$.

R 3 – La notion d'indépendance dépend de la probabilité $\mathbb{P}$ choisie sur les événements élémentaires. Elle dépend donc de la modélisation choisie.

Proposition 27
Soient A et B deux événements de $\mathcal{A}$. Alors :

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ sont indépendants} &\iff A \text{ et } \overline{B} \text{ sont indépendants} \\ &\iff \overline{A} \text{ et } \overline{B} \text{ sont indépendants} \\ &\iff \overline{A} \text{ et } B \text{ sont indépendants} \end{aligned}$$

Définition 28

Soient $A_1, \dots, A_n$, n événements de $\mathcal{A}$.

- On dit que les événements $A_1, \dots, A_n$ sont **deux à deux indépendants** pour la probabilité $\mathbb{P}$ si
$$\forall i \neq j,\ A_i \text{ et } A_j \text{ sont indépendants}$$
- On dit que les événements sont **mutuellement indépendants** pour la probabilité $\mathbb{P}$ si pour toute partie I de $[\![1, n]\!]$,
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Remarque :

La notion d'indépendance mutuelle est plus forte puisqu'elle comprend en particulier que les événements doivent être 2 à 2 indépendants.

$$\text{Indépendance mutuelle} \implies \text{Indépendance 2 à 2.}$$

La réciproque est évidemment fausse.

Définition 29

Soit (A_n) une suite infinie d'événements. On dit que les A_n sont **indépendants** (ou **mutuellement indépendants**) si pour tout partie finie I de $\mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

3.2 Grandes formules probabilistes

Proposition 30 ***Formule des Probabilités Composées***

Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements de $\mathcal{A}$ telle que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots \mathbb{P}_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)}$$

Exemple :

Une urne contient 3 boules blanches et 7 noires. On tire successivement trois boules sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir les 3 boules blanches ? On note

$$\forall k \in [\![1, 3]\!], B_k : \text{« obtenir une boule blanche au } k\text{-ième tirage ».}$$

On note $A = B_1 \cap B_2 \cap B_3$ l'événement cherché : "obtenir trois boules blanches".
Alors d'après la formule des probabilités composées : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3)$.
On a $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{3}{10}$ (3 blanches sur 10 boules au total).
On a $\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \dfrac{2}{9}$ (il reste alors 2 blanches sur 9 boules au total).
On a $\mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \dfrac{1}{8}$ (il reste alors 1 blanche sur 8 boules au total).
Finalement, on a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \dfrac{3}{10} \times \dfrac{2}{9} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{120}$.

Remarques :

R 1 – Lorsqu'une expérience est constituée de plusieurs étapes SUCCESSIVES, alors le deuxième tirage dépend du résultat du premier tirage, puis le troisième tirage dépend des résultats des deux premiers tirages, puis etc. (par exemple si on prélève une boule dans une urne sans remise)

R 2 – Bien sûr si les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont indépendants (par exemple si on prélève une boule dans une urne avec remise) on peut tout simplement multiplier et on a :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\cdots\mathbb{P}(A_n)$$

Théorème 31 ***Formule des probabilités totales***

Soit $(B_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements (ou quasi-complet) où $\forall i \in I, \mathbb{P}(B_i) \neq 0$.
Alors pour tout événement A, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}_{B_i}(A)}$$

Remarques :

R 1 – Cela signifie simplement que si (B_i) est un système complet d'événements, alors lorsqu'un événement A se réalise, il se réalise soit avec B_1, soit avec B_2, soit avec B_3, ...

R 2 – La formule est une généralisation de celle vue sur les probabilités d'intersection (Théorèmes 11 et 22).

R 3 – On utilise en particulier ce résultat lorsque A est une deuxième étape dans l'expérience, dépendant du résultat de la première étape (modélisé par les B_i).

Théorème 32 ***Formules de Bayes***

- *Soient A et B deux événements de $\mathcal{A}$ de probabilités non nulles. Alors :*

$$\boxed{\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)}{\mathbb{P}(A)}}$$

- *Soit $(B_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements (ou quasi-complet) où $\forall i \in I, \mathbb{P}(B_i) \neq 0$.*
  Soit A un événement de probabilité non nulle.
  Alors pour tout $j \in I$, on a :

$$\mathbb{P}_A(B_j) = \frac{\mathbb{P}(B_j)\mathbb{P}_{B_j}(A)}{\sum_{i\in I} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}_{B_i}(A)}$$

Remarque :

La formule de Bayes sert en particulier à « remonter le temps ».
Lorsqu'une expérience se déroule en deux étapes SUCCESSIVES, il peut être intéressant d'utiliser la formule de Bayes pour obtenir des informations sur la première étape, sachant qu'on connaît le résultat de la deuxième. Autrement dit, on cherche la probabilité d'une cause possible, connaissant le résultat de l'épreuve.

4 Bilan des méthodes et outils

4.1 Calcul d'une probabilité

1. S'il y a équiprobabilité dans Ω, on calcule : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.
2. Si on peut découper A en sous-ensembles $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ deux-à-deux incompatibles, alors on écrit :
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$
3. Si on dispose d'un système complet d'événements (B_i), on peut utiliser la **formule des probabilités totales**. On a :
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A\cap B_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}_{B_i}(A)$$

4.2 Calcul de la probabilité d'une réunion $\bigcup_{i\in I} A_i$.

1. Si les A_i sont **2 à 2 incompatibles**, alors on a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$ (réunion finie ou infinie).
2. Si les (A_i) forment une suite croissante, alors :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_n) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(A_N)$$
3. Sinon,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right)$$

Remarque : l'événement contraire d'une réunion est une intersection. $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} (\overline{A_i})$.

4.3 Calcul de la probabilité d'une intersection $\bigcap_{i\in I} A_i$.

1. Si les A_i sont **mutuellement indépendants**, on a $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$ (intersection <u>finie</u>)
2. Sinon, on utilise la **formule des probabilités composées** (toujours dans le cas fini) :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$
3. Si les (A_i) forment une suite décroissante, alors :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_n) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(A_N)$$
4. Sinon,
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{N} A_i\right)$$

Remarque : l'événement contraire d'une intersection est une réunion. $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} (\overline{A_i})$.