CHAPITRE 12

Sommes et séries

"L'art dramatique est une géométrie qui se parle en musique. " *Flaubert*

1 Généralités sur les séries

1.1 Définitions

Définition 1
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels positifs.

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la **somme partielle d'indice n** associée à la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On appelle alors **série de terme général u_n**, et on note $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ de ces sommes partielles.

Définition 2

- On dit que **la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge** si la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

  La limite (finie) de cette suite est alors appelée la **somme de la série**, qu'on note : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n}$.
- Si la série ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Remarque :

Il ne faut pas confondre les différents éléments de l'étude d'une série :

- ⋆ $(u_n)_{n\geqslant 0}$: la suite de base
- ⋆ u_n : le « terme général »de la suite/série.
- ⋆ S_n : la somme partielle d'ordre n des u_k : c'est $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
- ⋆ $(S_n)_{n\geqslant 0}$: la suite des sommes partielles.
- ⋆ $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ou $\sum u_n$: c'est la série, c'est la même chose que (S_n)

⋆ $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$: la somme de la série, i.e. la limite de (S_n) si elle existe et est finie. Sinon, ça n'a pas de sens.

Exemples :

E 1 – **Série télescopique** Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge.

Notons S_N la somme partielle de la série : $S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)}$. On a :

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \quad \text{(somme télescopique)}$$

On a donc $\lim_{N\to+\infty} S_N = 1$, donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge, et on a : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1}$.

E 2 – **Série harmonique** Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Soit $N \geqslant 1$. Pour tout $k \geqslant 1$, on a $\frac{1}{k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$. En sommant cette relation pour $k \in [\![1, N]\!]$:

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{N} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt = \int_1^{N+1} \frac{1}{t} dt = \ln(N+1)$$

Or, $\lim_{N\to+\infty} \ln(N+1) = +\infty$, donc par comparaison, $\lim_{N\to+\infty} S_N = +\infty$.
La série de terme général $\frac{1}{n}$ est donc divergente.

1.2 Reste d'une série convergente

Définition 3
Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, on appelle pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n le **reste d'indice n** :

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Remarques :

R 1 – Déterminer la nature d'une série signifie qu'il faut déterminer si la série est convergente ou divergente.

R 2 – Si la série est convergente, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ S_n + R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

R 3 – Si la série est convergente, on a

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$$

puisque $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

1.3 Propriétés

Proposition 4 ***Convergence et premier terme***
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite positive et soit* p *un entier quelconque. Alors :*

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge } \Longleftrightarrow \sum_{n\geqslant p} u_n \text{ converge}$$

Ainsi, la convergence ne dépend pas du premier terme à partir duquel on somme les termes de la suite. (Mais la valeur de la somme infinie peut être différente).

Proposition 5 ***Condition nécessaire de convergence***
Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *converge, alors la suite* (u_n) *converge nécessairement vers* 0.

Remarques :

R 1 – On utilise souvent la contraposée de cette propriété :

SI (u_n) ne converge pas vers 0, ALORS la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge (divergence grossière)

R 2 – La réciproque de cette propriété est FAUSSE, c'est une condition nécessaire pour converger mais pas suffisante : si la suite (u_n) converge vers 0, on ne peut pas affirmer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

(Ex : pensez à la série harmonique !)

Proposition 6 ***CNS de convergence***
La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *est positive. Ainsi, la suite* $(S_n)_{n\geqslant 0}$ *des sommes partielles est croissante. Ainsi :*

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge } \Longleftrightarrow (S_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge } \Longleftrightarrow (S_n)_{n\geqslant 0} \text{ majorée}$$

Remarque :

Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la suite (S_n) diverge nécessairement vers $+\infty$.

Exemple :

La série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2}$ converge puisque $\forall n \geqslant 2, S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = \sum\limits_{k=2}^{n} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = 1 - \frac{1}{n} \leqslant 1$ (série télescopique).

Proposition 7 ***Opérations sur les séries convergentes : structure d'ev***

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *deux séries.*

1. *Pour tout réel* λ *non nul, les séries* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} \lambda u_n$ *sont de même nature. De plus, si les séries convergent, on a :*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$
2. *Si les deux séries* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *sont convergentes,* <u>*alors*</u> *la série* $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ *est convergente également et*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Remarque :

La réciproque de la deuxième propriété est fausse !
On peut avoir $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ qui converge, sans que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ni $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ ne convergent (un exemple évident : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=1$ et $v_n=-1$).

Par exemple, on a montré que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ était convergente. Mais attention :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \quad \boxed{\neq} \quad \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}}_{\text{pas de sens !!}}$$

1.4 Critères de convergence pour les séries

Théorème 8 ***Théorème de comparaison***

Soient (u_n) *et* (v_n) *deux suites positives telles que :*
$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad 0\leqslant u_n\leqslant v_n$$
Alors :

- *Si* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *converge, alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge et on a :*
$$0\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$
- *Si* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge, alors* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *diverge.*

Remarque :

En pratique on cherchera à majorer le terme général d'une série par celui d'une série qui converge ou à le minorer par celui d'une série qui diverge.

Théorème 9 ***Théorème de négligeabilité***

Soient (u_n) *et* (v_n) *deux suites positives telles que :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$$

Alors :

- *Si* $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ *converge, alors* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *converge.*
- *Si* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge, alors* $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ *diverge.*

Théorème 10 ***Théorème d'équivalence***

Soient (u_n) *et* (v_n) *deux suites positives telles que :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

Alors les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ *sont de même nature.*

2 Extension au cadre général : convergence absolue

Dans ce paragraphe, on n'impose plus à ce que la suite (u_n) soit positive.

Définition 11
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels (pas forcément positifs). On dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ est convergente.

Théorème 12
Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes quelconques.
Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente, alors elle est aussi convergente.

Remarques :

R 1 – Si les termes d'une série $\sum u_n$ ne sont pas de signe constant, alors on regarde $\sum |u_n|$ qui elle, est une série à termes positifs : on peut appliquer les critères de comparaison.

- Si cette série $\sum |u_n|$ converge, alors on peut dire que $\sum u_n$ converge.
- ATTENTION : Si cette série $\sum |u_n|$ diverge, alors on ne peut a priori rien dire sur $\sum u_n$

R 2 – Conformément au programme, on se concentrera uniquement sur les séries à termes positifs, pour lesquelles le cadre est plus facile.
On peut cependant étendre toutes les définitions et remarques aux séries à termes quelconques.

R 3 – Il existe des séries (en particulier alternées) telles que la série soit à termes de signes non constants, et la série est convergente sans être absolument convergente.

Par exemple la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.
En effet, en notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$, on montre facilement que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, donc la suite (S_n) converge.

3 Séries usuelles et sommes à connaître

3.1 Séries géométriques et dérivées

Théorème 13 ***Séries géométriques***

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- *La série $\sum_{n \geqslant 0} q^n$ s'appelle la* ***série géométrique de raison*** *q.*

  Cette série converge si et seulement si $|q| < 1$ et : $\forall q \in]-1,1[$, $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}}$.

- *Plus généralement, si $|q| < 1$ et p est un entier naturel, alors :*

$$\boxed{R_{p-1} = \sum_{n=p}^{+\infty} q^n = \frac{q^p}{1-q}}$$

Théorème 14 ***Séries géométriques dérivées***

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- *La série $\sum_{n \geqslant 1} nq^{n-1}$ s'appelle la* ***série géométrique dérivée première de raison*** *q.*

  Cette série converge si et seulement si $|q| < 1$ et :

$$\forall q \in]-1,1[, \quad \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}}$$

- *La série $\sum_{n \geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ s'appelle la* ***série géométrique dérivée seconde de raison*** *q.*

  Cette série converge si et seulement si $|q| < 1$ et :

$$\forall q \in]-1,1[, \quad \boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}}$$

Remarques :

R 1 – À l'aide des séries précédentes, pour tous réels a, b et c, $\sum_{n=0}^{+\infty} (an^2+bn+c)q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.
En effet, la famille $(x(x-1), x, 1)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
Ainsi, on peut écrire $an^2+bn+c = \alpha n(n-1) + \beta n + \gamma$ et donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (an^2+bn+c)q^n$ est une combinaison linéaire des séries $\sum_{n \geqslant 0} q^n$, $\sum_{n \geqslant 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n \geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$.

R 2 – Remarquons que ces séries ne sont pas forcément à termes positifs puisqu'on a supposé $q \in \mathbb{R}$ quelconque.
Mais la convergence est assurée si et seulement si $-1 < q < 1$.

3.2 Séries exponentielles

Théorème 15 ***Séries exponentielles***

Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Alors la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ converge et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}. \qquad \textit{(}\textbf{\textit{Valeur admise}}\textit{)}$$

Remarque :

> Cette série est à termes quelconques (pas forcément positifs), mais on a convergence absolue de la série, ceci pour tout réel x.

3.3 Séries de Riemann

Théorème 16 ***Séries de Riemann***

*Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque. Alors la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée la **série de Riemann d'ordre** α. Alors*

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1}$$

*En particulier, $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ appelée la **série harmonique**, diverge.*

En particulier, $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge (vers $\frac{\pi^2}{6}$ ...)

Remarques :

> **R 1** – On ne sait pas calculer la somme des séries de Riemann.
>
> **R 2** – Les séries de Riemann sont très pratiques pour utiliser les critères de comparaison, on les utilise souvent dans un critère d'équivalence ou de négligeabilité.
>
> **R 3** – La preuve se fait par comparaison somme/intégrale, comme pour la série harmonique car ce sont les sommes que l'on utilise dans la méthode des rectangles (cf cours de terminale).