CHAPITRE 11

Compléments sur les suites

"La vieillesse est une suite de partis pris. " *Balzac*

1 Suites récurrentes linéaires doubles

Définition 1
Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de réels est dite **récurrente linéaire double** s'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Exemple :

Posons $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$

Proposition 2
Soient a et b deux réels non nuls. Soit $E = \{(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $: \forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+2} = au_{k+1} + bu_k\}$, et soit :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n\geqslant 0} & \longmapsto & \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Alors φ est un isomorphisme de E vers $\mathbb{R}^2$. E est donc un espace vectoriel de dimension 2.

Proposition 3

Soient a et b non nuls, et soit $E = \{(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $: \forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+2} = au_{k+1} + bu_k\}$

- *Si l'équation $\boxed{x^2 = ax+b}$ admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, alors les deux suites géométriques $(r_1)^n$ et $(r_2)^n$ forment une base de E.*

$$\forall (u_n)_{n\geqslant 0} \in E,\ \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{u_n = \lambda\ r_1^n + \mu\ r_2^n}$$

- *Si l'équation $\boxed{x^2 = ax+b}$ admet une unique solution réelle r, alors les deux suites (r^n) et (nr^n) forment une base de E.*

$$\forall (u_n)_{n\geqslant 0} \in E,\ \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{u_n = \lambda\ r^n + \mu\ n\ r^n}$$

- *Si l'équation $\boxed{x^2 = ax+b}$ admet deux solutions complexes conjuguées non réelles $re^{\pm i\theta}$, alors les deux suites $(r^n \cos(n\theta))$ et $(r^n \sin(n\theta))$ forment une base de E.*

$$\forall (u_n)_{n\geqslant 0} \in E,\ \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{u_n = \lambda\ r^n \cos(n\theta) + \mu\ r^n \sin(n\theta)}$$

2 Limite d'une suite

2.1 Comportement asymptotique d'une suite

Définition 4

Une suite (u_n) **converge** si elle admet une limite réelle finie ℓ, autrement dit si u_n peut être aussi proche que l'on veut de ℓ, du moment que n est suffisamment grand, c'est-à-dire supérieur à un certain rang. Autrement dit :

$$(u_n) \text{ converge vers } \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On note alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Remarques :

R 1 – Avec la définition ci-dessus, l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ contient donc tous les termes de la suite (u_n), sauf un nombre fini d'entre eux (jusqu'au rang $N-1$).

R 2 – **Étudier la nature d'une suite** (u_n), c'est déterminer si cette suite est convergente ou non.

Proposition 5 ***Unicité de la limite***

Si une suite (u_n) converge (admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$), alors cette limite est unique.

Définition 6

Une suite est dite **divergente** si elle n'est pas convergente. En particulier, on peut avoir une :

Divergence vers $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \iff \forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant A$

Divergence vers $-\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \iff \forall B < 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant B$

Remarques :

R 1 – Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors la suite (u_n) diverge, mais admet une limite.

R 2 – Une suite divergente peut ne pas avoir de limite du tout.
Par exemple : (u_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$.

Proposition 7
Si (u_n) est une suite convergente, alors (u_n) est nécessairement bornée.

Remarques :

R 1 – Une suite non bornée ne peut pas converger (c'est la contraposée)

R 2 – Une suite bornée n'est pas forcément convergente (par exemple $(-1)^n$)

2.2 Opérations sur les limites

Ce sont les mêmes règles que pour les fonctions, concernant les sommes, les produits, les inverses de suites (voir Chapitre 05 sur les Limites de Fonctions)
On a les mêmes formes indéterminées également :

$$\boxed{\infty - \infty} \qquad \boxed{0 \times \infty} \qquad \boxed{\frac{0}{0}} \qquad \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \qquad \boxed{1^\infty} \qquad \boxed{0^\infty} \qquad \boxed{\infty^0}$$

Théorème 8 ***Composition des limites***
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit (u_n) une suite de réels à valeurs dans I à partir d'un certain rang. Soient $a, x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = x_0 \text{ et } \lim_{x\to x_0} f(x) = a, \qquad \text{alors} \qquad \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = a$$

Remarque :

On peut donc utiliser les croissances comparées, ou les développements limités avec des suites.

Exemple :

On sait que pour tous réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0}$.

On en déduit que pour toute suite (u_n) qui diverge vers $+\infty$, on a :

$$\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0, \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\alpha u_n}}{(u_n)^\beta} = +\infty} \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(u_n))^\alpha}{(u_n)^\beta} = 0}$$

Théorème 9 ***Utilisation de la continuité***
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et si f est continue en ℓ, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Exemples :

E 1 – En 0, on a $\ln(1+x) = x + o(x)$, donc $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

Alors pour toute suite (u_n) qui converge vers 0, on a : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+u_n)}{u_n} = 1}$.

E 2 – En 0, on a : $e^x = 1 + x + o(x)$, donc $\dfrac{e^x - 1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

Alors pour toute suite (u_n) qui converge vers 0, on a : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{u_n} - 1}{u_n} = 1}$.

E 3 – Une limite à savoir refaire. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a}$$

Proposition 10 — ***Passage à la valeur absolue***

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$$

Remarque :

Pour montrer que (u_n) converge vers un réel ℓ, on peut donc aussi montrer que $(u_n - \ell)$ converge vers 0.

2.3 Suites extraites d'indices pairs et impairs

Définition 11

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels. On définit alors deux suites extraites de (u_n) :

- La suite (u_{2n}) est la **suite extraite d'indices pairs** : $(u_{2n}) = (u_0, u_2, u_4, u_6, \ldots)$
- La suite (u_{2n+1}) est la **suite extraite d'indices impairs** : $(u_{2n+1}) = (u_1, u_3, u_5, u_7, \ldots)$.

Proposition 12

Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers ℓ. Alors toute suite extraite de (u_n) converge aussi vers ℓ.

Remarques :

R 1 – Si (u_n) admet une suite extraite divergente, alors (u_n) diverge.

R 2 – Si (u_n) admet deux suites extraites qui tendent vers deux limites différentes, alors (u_n) diverge.

Théorème 13 — ***CNS de convergence***

Une suite (u_n) converge vers une limite finie ℓ si et seulement si la suite d'indices pairs (u_{2n}) et la suite d'indices impairs (u_{2n+1}) convergent toutes les deux vers cette même limite.

2.4 Inégalités, comparaison et encadrement

Remarques :

- **R 1** – Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et si $\ell > m$, alors on a $u_n > m$ à partir d'un certain rang.
- **R 2** – Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et si $\ell < M$, alors on a $u_n < M$ à partir d'un certain rang.
- **R 3** – Si (u_n) converge vers ℓ et si $m < \ell < M$, alors à partir d'un certain rang : $m < u_n < M$
- **R 4** – Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell'$ avec $\ell < \ell'$, alors à partir d'un certain rang : , on a forcément $u_n < v_n$.

Proposition 14

Si (u_n) est une suite positive (ou strictement positive) à partir d'un certain rang, et si (u_n) converge vers un réel ℓ, alors $\ell \geqslant 0$.

Remarque :

Attention : Si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on n'a pas forcément $\lim_{n\to+\infty} u_n > 0$. Une inégalité stricte devient toujours large après un passage à la limite.

Proposition 15 — ***Passage à la limite dans une inégalité***

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes et si à partir d'un certain rang, on a toujours $u_n \leqslant v_n$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Remarque :

Attention : un passage à la limite dans une inégalité n'est valable que si on sait à l'avance que les deux membres admettent des limites finies

Théorème 16 — ***Théorème de comparaison***

$$\text{Si } \begin{cases} \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant v_n \\ \text{et} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{cases},\quad \text{alors } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty. \qquad \text{Si } \begin{cases} \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \\ \text{et} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases},\quad \text{alors } \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$

Théorème 17 — ***Théorème d'encadrement***

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

Si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite finie ℓ, alors la suite (v_n) est convergente et converge vers cette même limite ℓ.

Conséquences 18 ***Théorème d'encadrement avec la valeur absolue***

Si à partir d'un certain rang, on a :

$$|u_n - \ell| \leqslant v_n \qquad \textit{et si} \lim_{n\to+\infty} v_n = 0,$$

alors la suite (u_n) est convergente et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Conséquences 19 ***Produit suite bornée / suite convergente vers 0***

Si (u_n) est une suite bornée et si (v_n) converge vers 0, alors la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Exemple :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{cos(n)}{n} = 0$.

2.5 Suites négligeables, suites équivalentes

Définition 20

Deux suites (u_n) et (v_n) (qui ne sont pas nulles à partir d'un certain rang) sont dites équivalentes et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

Exemples :

E 1 – On connaît déjà des équivalents usuels, grâce aux limites usuelles :
Si (u_n) est une suite qui converge vers 0, alors :

$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n; \qquad e^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n; \qquad (1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$$

E 2 – Une suite polynomiale est toujours équivalente à son terme de plus haut degré.

Proposition 21

Deux suites équivalentes ont la même limite, quand elles ont une limite.

Définition 22

Une suite (u_n) est dite **négligeable devant une suite (v_n)** qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ si on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Remarques :

R 1 – $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$

R 2 – $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \Longleftrightarrow u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$

Proposition 23 ***Croissances comparées des suites usuelles***

En notant $u_n \underset{n\to+\infty}{<<} v_n$ pour $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, on a : pour tous $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$,

$$n! \underset{n\to+\infty}{>>} e^{\alpha n} \underset{n\to+\infty}{>>} n^\beta \underset{n\to+\infty}{>>} (\ln(n))^\gamma$$

3 Le cas des suites monotones

3.1 Rappels

Définition 24

- Une suite est croissante si pour tout entier n, $u_{n+1} \geqslant u_n$
- Une suite est décroissante si pour tout entier n, $u_{n+1} \leqslant u_n$

3.2 Théorème de la limite monotone

Théorème 25 ***Théorème de la Limite Monotone***

- *Toute suite croissante et majorée est convergente.*
- *Toute suite décroissante et minorée est convergente.*
- *Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.*
- *Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.*

Remarques :

R 1 – Si une suite (u_n) est croissante et majorée, alors la limite de la suite (u_n) est le plus petit des majorants de la suite (u_n) ; c'est sa borne supérieure : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\to+\infty} u_n$.

R 2 – Si une suite (u_n) est décroissante et minorée, alors la limite de la suite (u_n) est le plus grand des minorants de la suite (u_n) ; c'est sa borne inférieure : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3.3 Suites adjacentes

Définition 26

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si, à partir d'un certain rang, l'une est croissante, l'autre est décroissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

Théorème 27

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors (u_n) et (v_n) sont des suites convergentes, et elles ont la même limite.

Exemple :

Pour $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \times n!}$. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4 Le cas des suites explicitement définies par une fonction

Définition 28
S'il existe une fonction f définie sur un intervalle qui contient $[0\,;\,+\infty[$ telle que pour tout entier n on a $u_n = f(n)$ alors on dit que la suite (u_n) est explicitement définie par la fonction f.

Remarque :

L'étude de f sur $[0\,;+\infty[$ permet de connaître la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (limite en $+\infty$ et variations)

Exemple :

Pour tout entier n non nul, on pose $u_n = \frac{1}{n}$

5 Le cas des suites récurrentes définies par une fonction

Définition 29
S'il existe une fonction f continue telle que pour tout entier n on a $u_{n+1} = f(u_n)$ alors on dit que la suite (u_n) est récurrente, définie par la fonction f.

Remarques :

R 1 – L'étude de f **ne permet pas** de connaître la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

R 2 – On dit qu'un intervalle **I est stable par** f si $f(I) \subset I$.

R 3 – Si (u_n) admet une limite finie l alors l **est un point fixe de** f : $f(l) = l$

Exemples :

E 1 – C'est le cas des suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques étudiées dans le chapitre 1.

E 2 – On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$.

E 3 – On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \frac{1}{u_n}$