

---

## Compléments sur les suites

---

"La vieillesse est une suite de partis pris." *Balzac*

### Prerequis

- Chapitre 1 (raisonnement par récurrence, suites usuelles)
- Chapitre 5 (notion de limite, théorèmes de convergence, relation de comparaison)
- Chapitres 9 et 10 (notion d'isomorphisme et d'espaces vectoriels)

### Objectifs

- Elargir ses connaissances sur les suites (limites, variations)
- Etudier les suites récurrentes linéaires doubles
- Etudier des suites explicites
- Etudier des suites récurrentes
- Etudier des suites adjacentes

### Exercices d'application

- Exercices 1, 3, 4, 5, 7, 10, 11, 13, 14, 18, 21, 23 du TD11

## 1 Suites récurrentes linéaires doubles

### Définition 1

Une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  de réels est dite **récurrente linéaire double** s'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

### Exemple :

Posons  $u_0 = 0, u_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$

**Proposition 2**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels non nuls. Soit  $E = \{(u_n)_{n \geq 0} \text{ telle que } : \forall k \in \mathbb{N}, u_{k+2} = au_{k+1} + bu_k\}$ , et soit :

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \varphi : (u_n)_{n \geq 0} &\longmapsto \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors  $\varphi$  est un isomorphisme de  $E$  vers  $\mathbb{R}^2$ .  $E$  est donc un espace vectoriel de dimension 2.

**Proposition 3**

Soient  $a$  et  $b$  non nuls, et soit  $E = \{(u_n)_{n \geq 0} \text{ telle que } : \forall k \in \mathbb{N}, u_{k+2} = au_{k+1} + bu_k\}$

- Si l'équation  $x^2 = ax + b$  admet deux solutions réelles distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , alors les deux suites géométriques  $(r_1)^n$  et  $(r_2)^n$  forment une base de  $E$ .

$$\forall (u_n)_{n \geq 0} \in E, \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \boxed{u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n}$$

- Si l'équation  $x^2 = ax + b$  admet une unique solution réelle  $r$ , alors les deux suites  $(r^n)$  et  $(nr^n)$  forment une base de  $E$ .

$$\forall (u_n)_{n \geq 0} \in E, \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \boxed{u_n = \lambda r^n + \mu n r^n}$$

- Si l'équation  $x^2 = ax + b$  admet deux solutions complexes conjuguées non réelles  $re^{\pm i\theta}$ , alors les deux suites  $(r^n \cos(n\theta))$  et  $(r^n \sin(n\theta))$  forment une base de  $E$ .

$$\forall (u_n)_{n \geq 0} \in E, \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \boxed{u_n = \lambda r^n \cos(n\theta) + \mu r^n \sin(n\theta)}$$

## 2 Limite d'une suite

### 2.1 Comportement asymptotique d'une suite

**Définition 4**

Une suite  $(u_n)$  **converge** si elle admet une limite réelle finie  $\ell$ , autrement dit si  $u_n$  peut être aussi proche que l'on veut de  $\ell$ , du moment que  $n$  est suffisamment grand, c'est-à-dire supérieur à un certain rang. Autrement dit :

$$(u_n) \text{ converge vers } \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

On note alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$$

**Remarques :**

**R1** – Avec la définition ci-dessus, l'intervalle  $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$  contient donc tous les termes de la suite  $(u_n)$ , sauf un nombre fini d'entre eux (jusqu'au rang  $N - 1$ ).

**R2** – **Étudier la nature d'une suite**  $(u_n)$ , c'est déterminer si cette suite est convergente ou non.

**Proposition 5***Unicité de la limite*

Si une suite  $(u_n)$  converge (admet une limite finie  $l \in \mathbb{R}$ ), alors cette limite est unique.

**Définition 6**

Une suite est dite **divergente** si elle n'est pas convergente. En particulier, on peut avoir une :

**Divergence vers  $+\infty$**  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \iff \forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n \geq A$

**Divergence vers  $-\infty$**  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \iff \forall B < 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n \leq B$

**Remarques :**

**R1** – Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  ou  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ , alors la suite  $(u_n)$  diverge, mais admet une limite.

**R2** – Une suite divergente peut ne pas avoir de limite du tout.

Par exemple :  $(u_n)$  telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$ .

**Proposition 7**

Si  $(u_n)$  est une suite convergente, alors  $(u_n)$  est nécessairement bornée.

**Remarques :**

**R1** – Une suite non bornée ne peut pas converger (c'est la contraposée)

**R2** – Une suite bornée n'est pas forcément convergente (par exemple  $(-1)^n$ )

**2.2 Opérations sur les limites**

Ce sont les mêmes règles que pour les fonctions, concernant les sommes, les produits, les inverses de suites (voir Chapitre 05 sur les Limites de Fonctions)

On a les mêmes formes indéterminées également :

$$\boxed{\infty - \infty} \quad \boxed{0 \times \infty} \quad \boxed{\frac{0}{0}} \quad \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \quad \boxed{1^\infty} \quad \boxed{0^\infty} \quad \boxed{\infty^0}$$

**Exemples :**

**E1** – **Cas des suites arithmétiques** : Déterminer, pour tout  $u_0 \in \mathbb{R}$  et pour tout réel  $r$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 + nr$

**E2** – **Cas des suites géométriques** : Déterminer, pour tout  $q \in \mathbb{R}$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$

**Théorème 8***Composition des limites*

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et soit  $(u_n)$  une suite de réels à valeurs dans  $I$  à partir d'un certain rang. Soient  $a, x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x_0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad \text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = a$$

**Remarque :**

On peut donc utiliser les croissances comparées, ou les développements limités avec des suites.

**Exemple :**

On sait que pour tous réels  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$ .

On en déduit que pour toute suite  $(u_n)$  qui diverge vers  $+\infty$ , on a :

$$\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha u_n}}{(u_n)^\beta} = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(u_n))^\alpha}{(u_n)^\beta} = 0$$

**Théorème 9***Utilisation de la continuité*

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  et si  $f$  est continue en  $\ell$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$ .

**Exemples :**

**E1** – En 0, on a  $\ln(1+x) = x + o(x)$ , donc  $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ .

Alors pour toute suite  $(u_n)$  qui converge vers 0, on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+u_n)}{u_n} = 1$ .

**E2** – En 0, on a :  $e^x = 1 + x + o(x)$ , donc  $\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ .

Alors pour toute suite  $(u_n)$  qui converge vers 0, on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{u_n} - 1}{u_n} = 1$ .

**E3** – **Une limite à savoir refaire :** Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

**Proposition 10***Passage à la valeur absolue*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |\ell|$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad \iff \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$$

**Remarque :**

Pour montrer que  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$ , on peut donc aussi montrer que  $(u_n - \ell)$  converge vers 0.

## 2.3 Suites extraites d'indices pairs et impairs

### Définition 11

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de réels. On définit alors deux suites extraites de  $(u_n)$  :

- La suite  $(u_{2n})$  est la **suite extraite d'indices pairs** :  $(u_{2n}) = (u_0, u_2, u_4, u_6, \dots)$
- La suite  $(u_{2n+1})$  est la **suite extraite d'indices impairs** :  $(u_{2n+1}) = (u_1, u_3, u_5, u_7, \dots)$ .

### Exemple :

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \cos(n\frac{\pi}{2})$  alors  $u_{2n} = \dots\dots\dots$  et  
 $u_{2n+1} = \dots\dots\dots$

### Proposition 12

Soit  $(u_n)$  une suite réelle qui converge vers  $\ell$ . Alors toute suite extraite de  $(u_n)$  converge aussi vers  $\ell$ .

### Remarque :

Par contraposée, si  $(u_n)$  admet une suite extraite divergente, ou si  $(u_n)$  admet deux suites extraites qui tendent vers deux limites différentes, alors  $(u_n)$  diverge.

### Théorème 13

### CNS de convergence

Une suite  $(u_n)$  converge vers une limite finie  $\ell$  si et seulement si la suite d'indices pairs  $(u_{2n})$  et la suite d'indices impairs  $(u_{2n+1})$  convergent toutes les deux vers cette même limite.

## 2.4 Inégalités, comparaison et encadrement

### Remarques :

**R1** – Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  et si  $\ell > m$ , alors on a  $u_n > m$  à partir d'un certain rang.

**R2** – Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  et si  $\ell < M$ , alors on a  $u_n < M$  à partir d'un certain rang.

**R3** – Si  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  et si  $m < \ell < M$ , alors à partir d'un certain rang :  $m < u_n < M$

**R4** – Soient deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$  avec  $\ell < \ell'$ , alors à partir d'un certain rang : , on a forcément  $u_n < v_n$ .

### Proposition 14

Si  $(u_n)$  est une suite positive (ou strictement positive) à partir d'un certain rang, et si  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$ , alors  $\ell \geq 0$ .

### Remarque :

Attention : Si  $u_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on n'a pas forcément  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n > 0$ .

Une inégalité stricte devient toujours large après un passage à la limite.

Par exemple : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{n} > 0$  pourtant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ .

**Proposition 15***Passage à la limite dans une inégalité*

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites convergentes et si à partir d'un certain rang, on a toujours  $u_n \leq v_n$ , alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

**Remarque :**

Attention : un passage à la limite dans une inégalité n'est valable que si on sait à l'avance que les deux membres admettent des limites finies

**Théorème 16***Théorème de comparaison*

$$\text{Si } \begin{cases} \forall n \geq n_0, u_n \geq v_n \\ \text{et} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \end{cases}, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty. \quad \text{Si } \begin{cases} \forall n \geq n_0, u_n \leq v_n \\ \text{et} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \end{cases}, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

**Théorème 17***Théorème d'encadrement*

Soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites telles que

$$\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n \leq w_n$$

Si les suites  $(u_n)$  et  $(w_n)$  convergent vers une même limite finie  $\ell$ , alors la suite  $(v_n)$  est convergente et converge vers cette même limite  $\ell$ .

**Exemple :**

Encadrer pour tout entier naturel  $n$  non nul  $u_n = \frac{\text{Arctan}(n)}{n}$  et déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Conséquences 18***Théorème d'encadrement avec la valeur absolue*

Si à partir d'un certain rang, on a :

$$|u_n - \ell| \leq v_n \quad \text{et si } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0,$$

alors la suite  $(u_n)$  est convergente et on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .

**Conséquences 19***Produit suite bornée / suite convergente vers 0*

Si  $(u_n)$  est une suite bornée et si  $(v_n)$  converge vers 0, alors la suite  $(u_n v_n)$  converge vers 0.

**Exemple :**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0.$$

## 2.5 Suites négligeables, suites équivalentes

### Définition 20

Deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  (qui ne sont pas nulles à partir d'un certain rang) sont dites équivalentes et on note  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$  si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ .

### Exemples :

**E1** – On connaît déjà des équivalents usuels, grâce aux limites usuelles :  
Si  $(u_n)$  est une suite qui converge vers 0, alors :

$$\ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n; \quad e^{u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n; \quad (1 + u_n)^\alpha - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha u_n$$

**E2** – Une suite polynomiale est toujours équivalente à son terme de plus haut degré.

### Proposition 21

Deux suites équivalentes ont la même limite, quand elles ont une limite (finie ou infinie).

### Définition 22

Une suite  $(u_n)$  est dite **négligeable devant une suite**  $(v_n)$  qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang, et on note  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$  si on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ .

### Remarques :

**R1** –  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \iff u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$

**R2** –  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n) \iff u_n + v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$

### Proposition 23

#### *Croissances comparées des suites usuelles*

En notant  $u_n \ll_{n \rightarrow +\infty} v_n$  pour  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ , on a : pour tous  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ ,

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\gg} e^{\alpha n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\gg} n^\beta \underset{n \rightarrow +\infty}{\gg} (\ln(n))^\gamma$$

### 3 Le cas des suites monotones

#### 3.1 Rappels

##### Définition 24

- Une suite est croissante si pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} \geq u_n$
- Une suite est décroissante si pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} \leq u_n$

##### Exemples :

- E1** – Cas des suites arithmétiques : Déterminer, pour tout  $u_0 \in \mathbb{R}$  et pour tout réel  $r$  ; les variations de  $(u_0 + nr)$
- E2** – Cas des suites géométriques : Déterminer, pour tout  $q \in \mathbb{R}$  ; les variations de  $(q^n)$

#### 3.2 Théorème de la limite monotone

##### Théorème 25

##### *Théorème de la Limite Monotone*

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Toute suite croissante et non majorée tend vers  $+\infty$ .
- Toute suite décroissante et non minorée tend vers  $-\infty$ .

##### Remarques :

- R1** – Toute suite croissante est ..... par son premier terme.
- R2** – Toute suite décroissante est ..... par son premier terme.
- R3** – Si une suite  $(u_n)$  est croissante et majorée, alors la limite de la suite  $(u_n)$  est le plus petit des majorants de la suite  $(u_n)$  ; c'est sa borne supérieure :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .
- R4** – Si une suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée, alors la limite de la suite  $(u_n)$  est le plus grand des minorants de la suite  $(u_n)$  ; c'est sa borne inférieure :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \inf_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

#### 3.3 Suites adjacentes

##### Définition 26

Deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont dites **adjacentes** si, à partir d'un certain rang, l'une est croissante, l'autre est décroissante, et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

##### Théorème 27

Si deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes, alors  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont des suites convergentes, et elles ont la même limite.

##### Exemple :

Pour  $n \geq 1$ ,  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$  et  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \times n!}$ . Montrer que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.

## 4 Le cas des suites explicitement définies par une fonction

### Définition 28

S'il existe une fonction  $f$  définie sur un intervalle qui contient  $[0; +\infty[$  telle que pour tout entier  $n$  on a  $u_n = f(n)$  alors on dit que la suite  $(u_n)$  est explicitement définie par la fonction  $f$ .

### Remarque :

L'étude de  $f$  sur  $[0; +\infty[$  permet de connaître le comportement de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (limite en  $+\infty$  et variations)

### Exemple :

Pour tout entier  $n$  non nul, on pose  $u_n = \frac{1}{n}$

## 5 Le cas des suites récurrentes définies par une fonction

### Définition 29

S'il existe une fonction  $f$  continue telle que pour tout entier  $n$  on a  $u_{n+1} = f(u_n)$  alors on dit que la suite  $(u_n)$  est récurrente, définie par la fonction  $f$ .

### Remarques :

**R1 – Attention :** L'étude de  $f$  (variations, limites) **ne permet pas** de connaître le comportement de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**R2 –** On dit qu'un intervalle **I est stable par  $f$**  si  $f(I) \subset I$ .

**R3 –** Si  $(u_n)$  admet une limite finie  $l$  alors  **$l$  est un point fixe de  $f$**  :  $f(l) = l$

### Exemples :

**E1 –** C'est le cas des suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques étudiées dans le chapitre 1.

**E2 –** On pose  $u_0 = 1$  et pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$ .

**E3 –** On pose  $u_0 = 1$  et pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{u_n}$