CHAPITRE 10

Espaces vectoriels

"Supposé qu'Euclide et ses prédécesseurs aient considéré le triangle comme une moitié de carré, ou, mieux, d'un parallélogramme : ils auraient été immédiatement conduits au vecteur, c'est-à-dire à la structure de l'espace comme espace vectoriel. " *M. Serres*

1 Définition

1.1 Espaces vectoriels de dimension n

Définition 1

Un **espace vectoriel de dimension** n est un ensemble E muni d'une opération interne $+$ (addition) et d'une opération externe $\cdot$ (multiplication par scalaire), pour lequel il existe une bijection $f : E \to \mathbb{R}^n$ qui préserve les combinaisons linéaires.

Remarque :

> L'espace $\mathbb{R}^n$ est donc l'espace vectoriel de dimension n « de référence ». Dès qu'un ensemble est en bijection avec $\mathbb{R}^n$ par une application linéaire, il se comporte de manière similaire, et est donc appelé aussi espace vectoriel.

Exemples :

> **E1** – Dans $\mathbb{R}^3$, considérons $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - z = 0\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
>
> F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En fait, puisqu'on a trouvé une base de cardinal 2 de ce sous-espace vectoriel, tous les vecteurs de F sont les vecteurs qui s'écrivent :
>
> $$a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix}$$

L'application $f : \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est alors une application linéaire bijective entre F et $\mathbb{R}^2$. Donc F est bien un espace vectoriel de dimension 2.

E 2 – Plus généralement, dans $\mathbb{R}^n$, chaque sous-espace vectoriel de dimension p est en bijection linéaire naturelle avec $\mathbb{R}^p$, donc chaque « sous-espace vectoriel » de dimension p est plus généralement un « espace vectoriel de dimension p » puisqu'il se comporte exactement comme $\mathbb{R}^p$.

Définition 2

Soient E et F deux espaces vectoriels quelconques de dimensions respectives p et n.
On appelle toujours **application linéaire de E vers F** toute application f qui préserve les combinaisons linéaires :

$$f : E \to F \text{ est linéaire } \iff \forall u, v \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$$

et on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

Lorsque $f(E) \subset E$, on dit que f est un **endomorphisme de E**, et on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Lorsque $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective, on dit que f est un **isomorphisme de E vers F**. Les espaces vectoriels E et F sont alors **isomorphes**.

Remarque :

Tous les espaces vectoriels de dimension n sont isomorphes à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Ainsi, tous les espaces vectoriels de dimension n sont isomorphes les uns aux autres.

1.2 Extension des notions déjà vues

Définition 3

Si E est un espace vectoriel quelconque de dimension n, on appelle **sous-espace vectoriel de E** tout ensemble F tel que :

- $F \subset E$
- $F \neq \emptyset$
- F est stable par combinaison linéaire.

Remarque :

Les sous-espaces vectoriels seront encore des espaces vectoriels inclus dans E, ils seront isomorphes à un des espaces $\mathbb{R}^k$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$.

Définition 4

Soit E un espace vectoriel quelconque de dimension n. On appelle **base de E** toute famille de vecteurs de E qui est libre et génératrice.

Remarques :

- **R 1** – Toutes les bases dans E ont nécessairement pour cardinal n si n est la dimension de E.
- **R 2** – Toute famille libre de n vecteurs dans E est une base.
- **R 3** – Toute famille génératrice de n vecteurs dans E est une base.
- **R 4** – La bijection structurelle f qui fait le lien entre E et $\mathbb{R}^n$ permet de se ramener à la théorie de $\mathbb{R}^n$.

1.3 Restrictions d'applications linéaires

Définition 5

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension respectives p et n, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si G est un sous-espace vectoriel de E, on appelle **restriction de f à G** l'application :

$$f_{|G} : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

L'application $f_{|G}$ est alors encore une application linéaire, allant de G vers F.

Remarques :

- **R 1** – Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si G est un sous-espace vectoriel de E, on a :

$$\mathrm{Ker}(f_{|G}) = G \cap \mathrm{Ker}(f) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(f_{|G}) = f(G)$$

- **R 2** – Le théorème du rang peut s'appliquer à f :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

  mais aussi s'application à $f_{|G}$:

$$\dim(G) = \dim(\mathrm{Ker}(f_{|G})) + \dim(\mathrm{Im}(f_{|G}))$$

- **R 3** – Si f est un endomorphisme de E, alors la restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$ définit un endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$.

2 Exemples usuels d'espaces vectoriels

2.1 Le plan complexe $\mathbb{C}$

Proposition 6

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un espace-vectoriel de dimension 2. En effet, $\mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$ par l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ a+ib & \longmapsto & (a,b) \end{array}$$

$$\boxed{\dim(\mathbb{C}) = 2}$$

Remarques :

- **R 1** – On parle donc de « plan complexe » puisque $\mathbb{C}$ se comporte dans sa structure exactement comme le plan $\mathbb{R}^2$.
- **R 2** – La base canonique de $\mathbb{C}$ est celle qui est réciproque de la base canonique $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$, donc la base canonique de $\mathbb{C}$ est $(1,i)$.

2.2 L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Proposition 7

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes est un espace vectoriel de dimension np. En effet, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{np}$ par l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{np} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \longmapsto & (a_{1,1}, \dots, a_{1,p}, a_{2,1}, \dots, a_{2,p}, a_{3,1}, \dots, a_{n,p}) \end{array}$$

$$\boxed{\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = np}$$

$$\boxed{\dim(\mathcal{M}_{n}(\mathbb{R})) = n^2}$$

Remarque :

La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est donc donnée par les **matrices élémentaires** $E_{i,j}$ qui comportent un 1 en position (i,j) et 0 sinon.

Exemples :

- **E 1** – Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la base canonique est $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est donc de dimension 4.

E 2 – Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, la base canonique est

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ est donc de dimension 6.

2.3 L'ensemble des applications linéaires $\mathcal{L}(E, F)$

Définition 8

Soit E un espace vectoriel de dimension p et soit F un espace vectoriel de dimension n.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Fixons $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une base de F.
Alors, la donnée de f revient à connaître l'expression de $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p)$ dans la base $\mathcal{C}$.
On appelle donc **matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** la matrice donnée par :

$$mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(u_1) & f(u_2) & \cdots & f(u_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{array}$$

Remarque :

La donnée d'une application linéaire revient exactement à la donnée de sa matrice dans deux bases précises (une au départ, et une à l'arrivée).

Proposition 9

Si E est un espace vectoriel de dimension p et F est un espace vectoriel de dimension n, alors l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E vers F est isomorphe à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, donc isomorphe à $\mathbb{R}^{np}$.

$$\boxed{\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)}$$

Exemples :

E 1 – Soit $f : E \to F$ avec $\dim(E) = 4$ et $\dim(F) = 3$.
On suppose que E admet pour base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ et F admet pour base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$.
Si $f(u_1) = v_1 + v_2$, $f(u_2) = -v_1 + v_2 + v_3$, $f(u_3) = v_3$ et $f(u_4) = v_1 + v_3$, alors la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

E 2 – Si $f : E \to F$ est l'application linéaire donnée dans une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ de E et une base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ de F par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

cela signifie que $f(u_1) = v_1 + v_3$ et $f(u_2) = -v_1 + v_2 + 2v_3$. Ainsi, pour tout vecteur x de E, puisque $x = au_1 + bu_2$, on a :

$$f(x) = af(u_1) + bf(u_2) = a(v_1 + v_3) + b(-v_1 + v_2 + 2v_3) = (a - b)v_1 + bv_2 + (a + 2b)v_3$$

Définition 10

Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit f un endomorphisme de E.
Fixons $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une base de E.
Alors, la donnée de f revient à connaître l'expression de $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.
On appelle donc **matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$** la matrice carrée donnée par :

$$mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(u_1) & f(u_2) & \cdots & f(u_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{array}$$

Proposition 11

Si E est un espace vectoriel de dimension n, alors l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E est isomorphe à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc isomorphe à $\mathbb{R}^{n^2}$.

$$\boxed{\dim(\mathcal{L}(E)) = (\dim(E))^2}$$

Remarque :

La donnée d'un endomorphisme revient exactement à la donnée de sa matrice relativement à une base précise (une au départ, et la même à l'arrivée).

3 Fonctions polynomiales

3.1 Définitions

Définition 12 **Fonction polynomiale**

On appelle **fonction polynomiale** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ pour laquelle, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et des coefficients réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Remarques :

- **R 1** – Si f est une fonction polynomiale, on appelle **degré de cette fonction polynomiale** la puissance de x la plus grande apparaissant dans la fonction f (s'il y en a une) :
  $\deg(f) = \max(\{k \geqslant 0 \ / \ a_k \neq 0\})$.
  Par exemple, les fonctions polynômiales de degré 2 s'écrivent : $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad$ avec $a_2 \neq 0$.
  Les fonctions constantes non nulles sont de degré 0.
  La fonction nulle est, par convention, de degré égal à $-\infty$.
- **R 2** – On appelle **coefficient dominant** le coefficient devant x^n si $n = \deg(f)$.
  Par exemple, si $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 1$, on a $\deg(f) = 3$ et le coefficient dominant est 4.
- **R 3** – On notera $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des fonctions polynomiales.
- **R 4** – On notera $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des fonctions polynomiales qui sont de degré au maximum n.

Proposition 13

Si f est une fonction polynomiale non constante, on a : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Plus précisément, si $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$, on a : $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} a_n x^n$.

3.2 Racines et extrema d'une fonction polynomiale

Définition 14

Soit f une fonction polynomiale.
On dit qu'un réel x_0 est une **racine** de f si $f(x_0) = 0$.

Proposition 15

Toute fonction polynomiale de degré impair admet au moins une racine réelle.

Remarque :

Le résultat n'est pas vrai pour une fonction polynomiale de degré pair. Par exemple $f : x \mapsto x^2 + 1$ n'admet aucune racine réelle.

Proposition 16 — ***Factorisation d'une fonction polynomiale***

Soit $n \geqslant 1$, soit $f \in \mathbb{R}_n[x]$ une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n et soit x_0 un réel. Alors :

$$x_0 \text{ est une racine de } f \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x - x_0)g(x) \quad \text{avec } g \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$$

Définition 17 — **Multiplicité d'une racine**

Soit f une fonction polynomiale, et soit x_0 un réel.
On dit que x_0 est une **racine de multiplicité k** si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x - x_0)^k g(x), \quad \text{avec } g \in \mathbb{R}[x],\ g(x_0) \neq 0$$

Remarques :

- **R 1** – Si x_0 est racine de f, alors on peut factoriser $f(x)$ par $(x - x_0)$. Mais la fonction polynomiale quotient obtenue peut parfois encore être factorisée par $(x - x_0)$, etc. On parle donc de multiplicité pour savoir combien de facteurs $(x - x_0)$ peuvent apparaître au maximum dans f.
- **R 2** – Si x_0 est une racine de f de multiplicité $k \geqslant 2$, alors x_0 est une racine de f' de multiplicité $k - 1$.
- **R 3** – Une fonction polynomiale change de signe en une racine si et seulement si la multiplicité de cette racine est impaire.

Proposition 18

Une fonction polynomiale f admet un extremum local en un réel x_0 si et seulement si x_0 est une racine de f' de multiplicité impaire.

Remarque :

En particulier, si une fonction polynomiale vérifie pour un réel x_0 que : $f'(x_0) = 0 \quad$ et $\quad f''(x_0) \neq 0$ alors x_0 est une racine de f' de multiplicité 1, donc f admet un extremum local en x_0.

Si $f''(x_0) > 0$, la fonction f' est croissante au voisinage de x_0, donc f admet un minimum en x_0.
Si $f''(x_0) < 0$, la fonction f' est décroissante au voisinage de x_0, donc f admet un maximum en x_0.

3.3 L'ensemble des fonctions polynomiales de degré $\leqslant n$ en tant qu'EV

Proposition 19

Soit $n \geqslant 0$. L'ensemble $E = \mathbb{R}_n[x]$ des fonctions polynomiales de degré inférieur à n.

$$\mathbb{R}_n[x] = \left\{x \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\right\}$$

est un espace vectoriel de dimension $n+1$. En effet, $\mathbb{R}_n[x]$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{n+1}$ par l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ (x \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) & \longmapsto & (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \end{array}$$

$$\boxed{\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1}$$

Exemple :

L'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur à 2 revient à définir les fonctions :

$$E = \mathbb{R}_2[X] = \left\{x \mapsto (ax^2 + bx + c), \qquad a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$$

Définir une fonction polynomiale de $\mathbb{R}_2[X]$ revient à donner la liste de ses 3 coefficients. On a donc $\dim(E) = 3$.

Remarque :

La base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ est la base réciproque de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. C'est donc la famille

$$\boxed{\mathcal{B} = (x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2, \ldots, x \mapsto x^n)}$$

que l'on peut écrire parfois abusivement :

$$\boxed{\mathcal{B} = (1, x, x^2, \ldots, x^n)}$$

Proposition 20

*L'écriture d'une fonction polynomiale est unique dans la base canonique (puisque la base canonique est une famille libre). Ainsi, si deux fonctions f et g sont polynomiales et égales, on peut **identifier** les coefficients deux à deux dans les écritures.*

Exemples :

E 1 – $ax^3 + bx^2 + cx + d = ex^2 + fx + g \Longleftrightarrow, \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = e \\ c = f \\ d = g \end{array}\right.$.

E 2 – En particulier, la fonction polynomiale nulle est unique, tous ses coefficients égaux à 0.

Remarques :

R 1 – $\mathbb{R}_0[x] = Vect(1)$ est l'ensemble des fonctions constantes. Il est de dimension 1 car isomorphe à $\mathbb{R}$.

R 2 – $\mathbb{R}_1[x] = Vect(1, x)$ est l'ensemble des fonctions affines. Il est de dimension 2 car isomorphe à $\mathbb{R}^2$.

Proposition 21

Une famille de fonctions polynomiales ***non nulles*** *de $\mathbb{R}_n[x]$, de degrés différents, est nécessairement libre dans $\mathbb{R}_n[x]$.*

Exemple :

La famille $(1, x-3, x(x+1)(x+2))$ est libre dans $\mathbb{R}_4[x]$.