Concours blanc n°1

La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Vous devez donc faire des raisonnements clairs et complets. Prenez soin d'utiliser le langage mathématique avec précision et de rendre une copie propre. Évitez les ratures, les fautes d'orthographe et de grammaire. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre que vous voulez en revanche l'ordre des questions au sein d'un exercice doit être respecté. Vous pouvez admettre un résultat et l'utiliser si vous n'arrivez pas à le démontrer.

La calculatrice est interdite.

Exercice 1 : Pour s'échauffer

Dans cet exercice les questions sont indépendantes.

1. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$, on a :
$$\frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$$
2. Montrer que pour tout réel x strictement positif on a :
$$x ln(x) \geq x - 1$$
3. Calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$
4. Avec une intégration par parties calculer $\int_1^e x^2 \ln(x)\, dx$
5. a) Soit i un entier naturel non nul. Montrer par récurrence sur n le résultat suivant : ∀ n≥ i,
$$\sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} = \binom{n+1}{i+1}$$
 b) En déduire que pour tout entier n non nul :
$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} = 2^{n+1} - n - 2$$

Exercice 2 : Trigonométrie

Dans cet exercice, les questions 2 et 3 sont indépendantes.

1. Montrer que pour tout réel x,
$$(\cos(x))^3 = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$$
et $$(\sin(x))^3 = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$$
2. a) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^3 dx$
 b) En déduire, grâce à une IPP, la valeur de
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, sin(x)(\cos(x))^2 dx$$
3. a) Justifier que pour tout réel x :
$$\sin(3x)\,(\cos(x))^3 + \cos(3x)\,(\sin(x))^3 = \frac{3}{4}\sin(4x) .$$
 b) Donner alors les solutions de l'équation
$sin(3x)\ (\cos(x))^3 + \cos(3x)\,(\sin(x))^3 = \frac{3}{4}$ dans $[0\ ; 2\pi[$.

Problème 1 : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur [0 ;+∞[par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & si\ x > 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Partie A : *Étude de la régularité de f*

1. Justifier que f est de classe C^2 sur]0 ;+∞[.
2. Montrer que f est continue sur [0 ;+∞[.
3. Donner la limite de f en +∞. L'interpréter graphiquement.
4. a) Montrer que pour tout réel $x > 0$,
$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

b) On admet qu'au voisinage de 0, on a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

En déduire que : $e^x - 1 - xe^x = \frac{-1}{2}x^2 + o(x^2)$
puis déterminer la limite de $f\,'(x)$ en 0.

Remarque : On admet alors que f est C^1 sur [0 ;+∞[(théorème de prolongement C^1) et que $f'(0) = \frac{-1}{2}$.

c) Calculer la limite de $f\,'(x)$ en +∞.

Partie B : *Étude des variations de f*

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$,
$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)^3}g(x) \text{ où } g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2 \ .$$
2. a) Calculer g' et vérifier que $\forall\ x > 0;\ g''(x) = xe^x$.
   b) En déduire le sens de variation de g' ; celui de g puis justifier que $\forall\ x > 0, f''(x) > 0$.
3. Étudier f' sur [0 ;+∞[.
4. Donner le tableau de variation de f sur [0 ;+∞[.

Partie C : *Étude d'une suite récurrente*

1. a) Montrer que pour tout $x \geq 0$; $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
   b) Montrer que pour tout $x \geq 0$; $f(x) \ \in]0;1]$.
2. Résoudre dans]0 ;+∞[l'équation $f(x) = x$.
3. Justifier que pour tous réels x et y strictement positifs,
$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$$
4. On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
   a) Justifier que pour tout entier naturel n on a :
$$|u_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|$$
   b) Démontrer que ∀ n ∈ ℕ,
$$|u_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \ln(2)|$$
   c) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Problème 2 : Intégrale et fonction

On considère la fonction f définie par :

$$f\ (x) = \text{Arctan}\left(\sqrt{x^2+1}\right)$$

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est ℝ.
2. Montrer que f est paire.
3. Dresser le tableau de variation complet de f sur $[0\,;\,+\infty[$ puis sur ℝ.
4. Donner l'équation de la droite T, tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
5. Donner l'allure de la courbe de f dans un repère.
6. Justifier que l'équation $f(x) = \frac{3}{2}$ admet une unique solution sur [0 ; +∞[.

Partie B :

1. Justifier qu'une primitive de $v: x \to Arctan(x)$ est
$$h: x \to x\,Arctan(x) - \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)$$
2. A l'aide du changement de variable u= $\sqrt{x^2+1}$, calculer $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} f\ (x)\, dx$

BONUS 1 : Étude d'une fonction (again !)

On considère la fonction f définie sur]-1 ; +∞[par

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

1. Étudier les variations de f et ses limites aux bornes de son ensemble de définition.

2. Montrer que pour tout $x \in [0\,;1], \frac{x^3}{6} \leq f(x) \leq \frac{2x^3}{3}$

   et que pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}\,;0\right], \frac{2x^3}{3} \leq f(x) \leq \frac{x^3}{6}$.

   En déduire qu'au voisinage de 0 : $ln(1+x) - x \sim \frac{-1}{2}x^2$.

1. On considère la fonction g définie sur]-1 ; +∞[par

$$\begin{cases} g(x) = \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} & si\ x \neq 0 \\ g(0) = \frac{-e}{2} & \end{cases}.$$

   g est-elle continue sur]-1 ; +∞[?

BONUS 2:

Pour tout réel $x \in]-\pi;\pi[\backslash\{0\}$, on pose $f(x) = \frac{\sin(3x) - \sin(2x)}{\sin(x)}$.

1) Montrer que $f(x) = 4cos(x)^2 - 2\cos(x) - 1$
2) f est-elle paire ou impaire ? Justifier.
3) Résoudre dans]-1 ;1[l'équation $4X^2 - 2X - 1 = 0$.
4) En sachant que $f\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0;$ déterminer $\cos(\frac{\pi}{5})$.

SI VOUS VOUS ENNUYEZ : Formule de Vandermonde

1. **Étude d'un cas particulier**
   a. Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant la formule du binôme de Newton, retrouvez le coefficient de x^4 dans le développement de $(1+x)^8$.
   b. En remarquant que $(1+x)^8 = (1+x)^4(1+x)^4$, donnez ce coefficient en fonction de $\binom{4}{k}$, $0 \leq k \leq 4$.
   c. En déduire que $\binom{8}{4} = \binom{4}{0}^2 + \binom{4}{1}^2 + \binom{4}{2}^2 + \binom{4}{3}^2 + \binom{4}{4}^2$
2. **Application**
   On admet que pour tout entier naturel n:
   $$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \quad \text{(Formule de Vandermonde)}$$
   On propose alors de calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}^2$
   a. Justifier que $S_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k) \binom{n}{k}^2$
   b. En déduire une expression de $2S_n$ puis de S_n en fonction de n.

Exercice 3 : Complexes

1. a) Donner la forme algébrique de $\frac{16\sqrt{2}}{1-i}$.

   b) Donner une forme exponentielle de $\frac{16\sqrt{2}}{1-i}$.

   c) En déduire les solutions complexes de l'équation

$$z^4 = \frac{16\sqrt{2}}{1-i} .$$

2. a) Pour n un entier naturel non nul et $x \in]0; \pi[$,
   justifier que $\sum_{k=0}^{n-1}(e^{2ix})^k = e^{i(n-1)x} \times \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}$

   b) En déduire la valeur de :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)ix} \text{ puis de } \sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)\,x).$$

6. Calculer $\int_1^2 e^{\sqrt{t}} dt$ (chgt de variables u= $\sqrt{t}$ et IPP).