HKBL 2020-2021

Préparation du CB1

Exercice 1 :

0. Démontrer que pour tout réel θ on a : $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x}cos(x) \text{ et } g(x) = e^{-x}$$

et on définit la fonction h sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.

1. (a) Déterminer les limites des fonctions f et g en $+\infty$.
   (b) En déduire l'équation d'une asymptote commune aux deux courbes.
2. Justifier que $\mathcal{C}_g$ est située au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. (a) On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$, $h'(x) = e^{-x}(\sqrt{2}cos(x - \frac{\pi}{4}) - 1)$.
   (b) Justifier que, sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$, $\sqrt{2}cos(x - \frac{\pi}{4}) - 1 \geq 0$ et que, sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2}; 2\pi]$, $\sqrt{2}cos(x - \frac{\pi}{4}) - 1 \leq 0$.
   (c) En déduire le tableau de variation de la fonction h sur $[0; 2\pi]$.
   (d) Déterminer pour quelle valeur de l'abscisse x l'écart entre les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ est maximal.

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[\setminus\{1\}$ par :

$$\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, \ f(x) = \frac{x+1}{x-1} \times \frac{\ln(x)}{2}$$

1. Montrer qu'on peut prolonger f en une fonction continue sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que : $\forall x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.
   En déduire que pour tout $x > 1$, on a $f(x) < x$.
3. Calculer la dérivée f' de f sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$. Étudier son signe et en déduire que f est monotone sur chacun de ces deux intervalles.
4. Vérifier que pour tout $x > 0$ tel que $x \neq 1$, on a :

$$f'(x) = \frac{x - 1 - \ln(x)}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x}$$

   En déduire que la fonction (prolongée) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
   Indication : *on pourra utiliser sans le démontrer l'équivalent suivant :* $\ln(1+u) - u \underset{u \to 0}{\sim} -\frac{u^2}{2}$
5. Justifier qu'il existe $\alpha > 1$ tel que : $\forall x \in]1 - \alpha, 1 + \alpha[, \ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{3}$.
6. Montrer que pour tout $x \in]1 - \alpha, 1 + \alpha[$, on a :

$$|f(x) - 1| \leqslant \frac{1}{3}|x - 1|$$

Exercice 3 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction φ_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_n(x) = e^{nx} - 10e^{-x} + 3$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel u_n tel que $\varphi_n(u_n) = 0$.
2. Calculer u_0 et u_1.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\varphi_n(0)$.
   En déduire le signe de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Calculer $\varphi_n(u_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

Préparation du CB1 : Corrigé

Exercice 1 :

0. Avec la formule d'addition du cosinus on a pour tout réel θ : $\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) = \cos(\theta)+\sin(\theta)$
1. (a) Pour tout réel x, $\cos(x)$ est borné et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{u\to-\infty} e^{u} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

   (b) Les courbes de f *et* g ont pour asymptote commune l'axe des abscisses d'équation y = 0.

2. $g(x)-f(x) = e^{-x} - e^{-x}\cos(x) = (1-\cos(x))e^{-x}$

Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et $\cos(x) \leqslant 1$ donc $(1-\cos(x)) \geqslant 0$; donc, pour tout x, $g(x)-f(x) \geqslant 0$ et donc la courbe $\mathscr{C}_g$ est située au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

3.

a. On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Les fonctions f et g sont dérivables sur $[0;+\infty[$ donc la fonction h est dérivable sur $[0;+\infty[$:

$h'(x) = g'(x)-f'(x) = -e^{-x} - \left(-e^{-x}\cos(x) + e^{-x}(-\sin(x))\right) = e^{-x}(-1+\cos(x)+\sin(x))$

On a vu dans la partie A que, pour tout réel θ, $\sqrt{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos(\theta)+\sin(\theta)$, donc

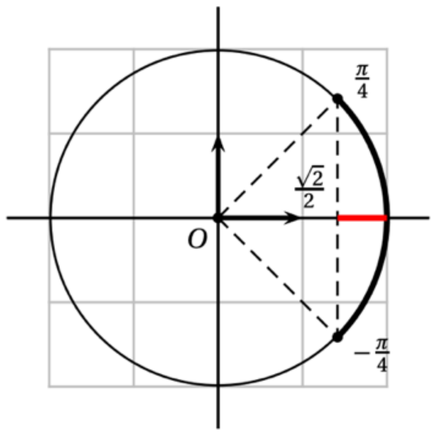
$\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos(x)+\sin(x)$.

On peut donc en déduire que $h'(x) = e^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1\right]$.

b.

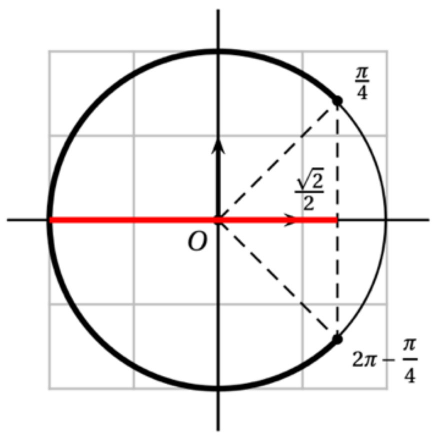
- On se place dans l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$
$$\iff -\frac{\pi}{4} \leqslant x-\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{4}$$
$$\implies \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\iff \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \geqslant 1$$
$$\iff \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1 \geqslant 0$$



- On se place dans l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$.

$$\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi$$
$$\iff \frac{\pi}{4} \leqslant x-\frac{\pi}{4} \leqslant 2\pi-\frac{\pi}{4}$$
$$\implies \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\iff \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$$
$$\iff \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1 \leqslant 0$$



c. $h(x) = g(x) - f(x) = \mathrm{e}^{-x}(1-\cos(x))$

$h(0) = \mathrm{e}^{0}(1-\cos(0)) = 1(1-1) = 0$

$h(2\pi) = \mathrm{e}^{-2\pi}(1-\cos(2\pi)) = \mathrm{e}^{-2\pi}(1-1) = 0$

$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}(1-0) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}21$

On en déduit le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$.

d.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		2π
e^{-x}		$+$		$+$	
$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$		$+$	0	$-$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$	$\searrow$	0

L'écart entre $f(x)$ et $g(x)$ est donné par $|g(x)-f(x)| = |h(x)| = h(x)$.
Il est maximal pour $x = \frac{\pi}{2}$ (en effet pour tout entier naturel k, la fonction h admet un maximum relatif sur $[2k\pi; 2(k+1)\pi]$ pour $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ mais ce maximum vaut $e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$; il est donc d'autant plus petit que k est grand).

Exercice 2 :

1. La fonction f est clairement continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ comme produit et quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant jamais sur ces intervalles.
De plus, on sait que $\ln(x) \underset{x\to1}{\sim} x-1$, donc :

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \times \frac{\ln(x)}{2} \underset{x\to1}{\sim} \frac{x+1}{x-1} \times \frac{x-1}{2} = \frac{x+1}{2} \underset{x\to1}{\longrightarrow} 1$$

Ainsi, on peut prolonger f par continuité en 1 en posant $\boxed{f(1)=1}$.
La fonction f devient alors continue sur $]0,+\infty[$.

2. En étudiant les variations de la fonction $x \longmapsto \ln(x) - x + 1$ sur $]0\,;+\infty[$, on montre que

$$\forall x > 0\,;\ \ln(x) \leq x - 1$$

(**Remarque :** on peut aussi évoquer la concavité de ln)

Remarquons que l'inégalité précédente est stricte lorsque $x \neq 1$. On a donc pour tout $x > 1$, $\ln(x) < x-1$.
Ainsi, on a pour tout $x > 1$:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \times \frac{\ln(x)}{2} < \frac{x+1}{x-1} \times \frac{x-1}{2} = \frac{x+1}{2}$$

et puisque $x > 1$, on a $2x > x+1$, autrement dit on a bien :

$$f(x) < \frac{x+1}{2} < x \Longrightarrow \boxed{f(x) < x}$$

3. La fonction f est bien dérivable sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ comme produit et quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant jamais sur ces intervalles.
   On a alors pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1)(x-1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2}\frac{\ln(x)}{2} + \frac{x+1}{x-1}\frac{1}{2x} = \frac{-\ln(x)}{(x-1)^2} + \frac{x+1}{2x(x-1)} \\ &= \frac{-2x\ln(x)+(x-1)(x+1)}{2x(x-1)^2} = \frac{-2x\ln(x)+x^2-1}{2x(x-1)^2} \end{aligned}$$

   Le dénominateur étant toujours positif, le signe de $f'(x)$ dépend du numérateur.
   Posons pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\varphi(x) = -2x\ln(x)+x^2-1$. La fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x>0, \varphi'(x) = -2\ln(x)-2+2x = 2(-\ln(x)+x-1) \geqslant 0$ (d'après la question 2). La fonction φ est donc croissante sur $]0,+\infty[$ et puisque $\varphi(1)=1$, on en déduit que $\forall x \in]0,1[, \varphi(x)<0$ et $\forall x \in]1,+\infty[, \varphi(x)>0$.
   On en déduit que f est décroissante sur $]0,1[$ et f est croissante sur $]1,+\infty[$.
4. Pour tout $x>0$ tel que $x \neq 1$, on a :

$$\frac{x-1-\ln(x)}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x} = \frac{2x(x-1-\ln(x))-(x-1)^2}{2x(x-1)^2} = \frac{x^2-2x\ln(x)-1}{2x(x-1)^2} = f'(x)$$

   La formule est donc bien valide.
   En utilisant l'équivalent proposé, on a :

$$\ln(x)-x+1 = \ln(1+(x-1))-(x-1) \underset{x\to1}{\sim} -\frac{(x-1)^2}{2}$$

   D'où :

$$\frac{x-1-\ln(x)}{(x-1)^2} = -\frac{\ln(x)-x+1}{(x-1)^2} \underset{x\to1}{\sim} \frac{(x-1)^2}{2(x-1)^2} = \frac{1}{2} \underset{x\to1}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

   Puisque $\lim\limits_{x\to1} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$, on en déduit par somme de limites que :

$$\lim_{x\to1} f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

   La fonction f est donc continue sur $]0,+\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ (toujours par produit et quotient) et $\lim\limits_{x\to1} f'(x) = 0$. Par le Théorème Limite de la Dérivée, la fonction f est bien dérivable en 1, on a $f'(1)=0$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
5. Puisqu'on a montré que $\lim\limits_{x\to1} f'(x) = 0$, cela se traduit par le fait que :

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \alpha>0 \ /\ |x-1|<\alpha \Longrightarrow |f'(x)-0| \leqslant \varepsilon$$

   En particulier pour $\varepsilon = \dfrac{1}{3}$, il existe bien un $\alpha>0$ tel que pour tout $x \in]1-\alpha, 1+\alpha[$, on ait $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{3}$.
6. Puisque f est continue et dérivable sur $]1-\alpha,1+\alpha[$ et que $\forall t \in]1-\alpha,1+\alpha[, |f'(t)| \leqslant 1/3$, d'après l'Inégalité des Accroissements Finis, on a :

$$\forall x,y \in]1-\alpha,1+\alpha[,\ |f(x)-f(y)| \leqslant \frac{1}{3}|x-y|$$

En particulier pour $y=1$ (qui appartient bien à $]1-\alpha,1+\alpha[$, sachant que $f(1)=1$, on en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in]1-\alpha,1+\alpha[,\ |f(x)-1| \leqslant \frac{1}{3}|x-1|}$$

Exercice 3 :

1. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de fontions dérivables). On a de plus : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_n'(x) = ne^{nx} + 10e^{-x} > 0$. La fonction φ_n est donc au final <u>strictement croissante sur $\mathbb{R}$</u>. De plus, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to+\infty} e^{nx} - 10e^{-x} + 3 = \boxed{-\infty}$$
et
$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (e^{nx} - 10e^{-x} + 3) = \boxed{+\infty} & \text{si } n \geqslant 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (1 - 10e^{-x} + 3) = \boxed{4} & \text{si } n = 0 \end{cases}$$
2. La fonction φ_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, la fonction φ_n réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $J = \varphi_n(\mathbb{R})$ qui est $J =]-\infty, 4[$ si $n = 0$ ou $J =]-\infty, +\infty[$ si $n \geqslant 1$.
3. Puisque φ_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_n'(x) \neq 0$, on a φ_n^{-1} dérivable sur J et pour tout $x \in J$,
$$(\varphi_n^{-1})'(x) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{1}{ne^{n\varphi^{-1}(x)} + 10e^{-\varphi^{-1}(x)}}$$
4. Dans tous les cas ($n = 0$ ou $n \geqslant 1$), $0 \in \varphi_n(\mathbb{R})$, donc 0 admet un unique antécédant dans $\mathbb{R}$ par φ_n : $\boxed{\exists !\, u_n \in \mathbb{R} \ / \ \varphi_n(u_n) = 0}$.
5. • u_0 est la solution de l'équation :$1 - 10e^{-x} + 3 = 0$.

   On a : $1 - 10e^{-x} + 3 = 0 \iff 10e^{-x} = 4 \iff e^{-x} = \dfrac{2}{5} \iff x = -\ln\left(\dfrac{2}{5}\right) = \ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$: on a $\boxed{u_0 = \ln\left(\dfrac{5}{2}\right)}$.

   • u_1 est la solution de l'équation : $e^x - 10e^{-x} + 3 = 0 \iff (e^x)^2 + 3e^x - 10 = 0$.
   On pose $y = e^x > 0$ et on résout $y^2 + 3y - 10 = 0$.
   On a $\Delta = 9 + 40 = 49 = 7^2$, donc les racines sont : $y_1 = \frac{-3-7}{2} = -5 < 0$ et $y_2 = \frac{-3+7}{2} = 2 > 0$. Seul $y = 2$ convient, on a donc finalement $x = \ln(2)$. Ainsi $\boxed{u_1 = \ln(2)}$.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\varphi_n(0) = e^0 - 10e^0 + 3 = \boxed{-6} < 0 = \varphi_n(u_n)$$
Par stricte croissance de φ_n sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $0 < u_n$. Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0}$.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\varphi_n(u_{n+1}) = e^{nu_{n+1}} - 10e^{-u_{n+1}} + 3$.
Or, on sait que $\varphi_{n+1}(u_{n+1}) = 0 \Longrightarrow e^{(n+1)u_{n+1}} - 10e^{u_{n+1}} + 3 = 0 \Longrightarrow -10e^{-u_{n+1}} + 3 = -e^{(n+1)u_{n+1}}$.
On a donc :
$$\varphi_n(u_{n+1}) = e^{nu_{n+1}} - e^{(n+1)u_{n+1}} = e^{nu_{n+1}}\left(1 - e^{u_{n+1}}\right)$$
Or, $u_{n+1} > 0$, donc $e^{u_{n+1}} > 1$ et $1 - e^{u_{n+1}} < 0$. On a donc : $\varphi_n(u_{n+1}) < 0 = \varphi_n(u_n)$, et par stricte croissance de φ_n sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $u_{n+1} < u_n$. <u>La suite (u_n) est donc décroissante.</u>