EXERCICE I :

a réel strictement positif et pour tout entier n :

$$S_n(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ka+1}$$

Partie I – Préliminaires

1) a- Pour tout entier k :

- $k = 0$:

$$\int_0^1 t^{ka}\, dt = \int_0^1 1\, dt = 1 - 0 = \mathbf{1}$$

- $k > 0$ donc $ka + 1 > 1$

$$\int_0^1 t^{ka}\, dt = \left[\frac{1}{ka+1} t^{ka+1}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{ka+1}$$

- Conclusion :

$$\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 \boldsymbol{t^{ka}\, dt} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{ka+1}}.$$

b- Pour tout entier n :

$$S_n(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ka+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{ka}\, dt \quad (\,d'après\ a)$$

$$S_n(a) = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, t^{ka}\right) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t^a)^k$$

$or\ \sum_{k=0}^{n} (-t^a)^k$ est une somme géométrique de raison $-t^a \leq 0$ $donc$ $-t^a \neq 1$ et :

$$\sum_{k=0}^{n} (-t^a)^k = \frac{1-(-t^a)^{n+1}}{1-(-t^a)} = \frac{1-(-t^a)^{n+1}}{1+t^a} = \frac{1}{1+t^a} + \frac{-(-1)^{n+1}(t^a)^{n+1}}{1+t^a}$$

$$or - (-1)^{n+1} = (-1)^{n+2} = (-1)^n \quad d'où\,, toujours\ par\ linéarité\ de\ l'intégrale :$$

$$\boldsymbol{S_n(a)} = \int_0^1 \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{1+t^a}}\boldsymbol{dt} + \int_0^1 \frac{\boldsymbol{(-1)^n t^{an+a}}}{\boldsymbol{1+t^a}}\boldsymbol{dt}$$

c- La fonction $t \to \frac{1}{1+t^a}$ est définie et continue sur l'intervalle fermé $[0\,;1]$ donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt$ existe. De plus :

$$0 \leq t \leq 1 \quad donc \quad 1 \leq 1 + t^a \leq 1 + 1^a = 2$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 t^{an+a}\, dt \leq \int_0^1 \frac{t^{an+a}}{1+t^a} \leq \int_0^1 t^{an+a}\, dt \ \ avec\ \int_0^1 t^{an+a}\, dt = \frac{1}{an+a+1}\ \ et\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{an+a+1} = 0$$

Ainsi d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n\, t^{an+a}}{1+t^a} = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{an+a}}{1+t^a} = 0$$

Par somme de limites, on en conclut :

$$\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{S_a(n) = S(a)} = \int_0^1 \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{1+t^a}}\boldsymbol{dt}$$

2) Comme $0 \leq t^a \leq 1,\ 1 - t^a \in [0\,;1]$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t^a)^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1-t^a}{2}\right)^k \quad avec \quad \frac{1}{2}(1-t^a) \neq -1 \quad d'où :$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t^a)^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1-t^a}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1-t^a}{2}} = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{2-1+t^a} \times \frac{2^{n+1}-(1-t^a)^{n+1}}{2^{n+1}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t^a)^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{1+t^a}\left(1-\frac{(1-t^a)^{n+1}}{2^{n+1}}\right) \quad et\ en\ développant :$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{1+t^a} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t^a)^k}{2^{k+1}} + \frac{(1-t^a)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t^a)}}$$

Partie II – Cas $a = 1$:

3) D'après 1) c :

$$S(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = [\ln|1+t|]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 \quad donc : \boldsymbol{S(1) = \ln 2}$$

4) Pour n entier :

$$|S(1) - S_n(1)| = \left|-\int_0^1 \frac{(-1)^n t^{n+1}}{1+t}dt\right| \quad d'après\ 1)\ b$$

$$|S(1) - S_n(1)| = \left|(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt\right| = \left|\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt\right|$$

$$or\ \frac{t^{n+1}}{1+t} \geq 0\ sur\ [0\,;1]\ \ donc \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt \geq 0\ \ et\ \ |S(1)-S_n(1)| = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt$$

$$D'après\ 1)c : \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt \leq \int_0^1 t^{n+1}dt \quad avec \quad \int_0^1 t^{n+1}dt = \frac{1}{n+2}$$

$$\boldsymbol{|S(1) - S_n(1)| \leq \frac{1}{n+2}}$$

5) a- Pour n entier et $0 \leq t \leq 1$, $on\ a : \quad 1 \leq 1+t \leq 2 \quad et :$

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t)}\,dt \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{2^{n+1}\times 1}\,dt \quad car \quad \frac{1}{1+t} \leq 1$$

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t)}\,dt \leq \frac{1}{2^{n+1}}\int_0^1 (1-t)^{n+1}\,dt \quad avec \int_0^1 (1-t)^{n+1}\,dt = \left[\frac{-1}{n+2}(1-t)^{n+2}\right]_0^1 = +\frac{1}{n+2}$$

$$\boldsymbol{Ainsi : \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t)}\,dt \leq \frac{1}{(n+2)2^{n+1}}}$$

b- D'après 2) :

$$S(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t)^k}{2^{k+1}} + \frac{(1-t)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t)}\right)dt$$

$$S(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}}\int_0^1 (1-t)^k dt + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t)}dt \quad avec\ pour\ tout\ entier\ k : \quad \int_0^1 (1-t)^k dt = \frac{1}{k+1}$$

$$S(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)\,2^{k+1}} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t)}dt$$

$$et\ alors : \left|S(1)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)\,2^{k+1}}\right| = \left|\int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t)}dt\right| = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t)}dt \quad (intégrale\ positive)$$

$$et\ d'après\ 5)a : \left|\boldsymbol{S(1)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)\,2^{k+1}}}\right| \le \boldsymbol{\frac{1}{(n+2)2^{n+1}}}$$

$$Comme \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+2)2^{n+1}} = 0, on\ en\ conclut\ que\ S(1) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)\,2^{k+1}}$$

$$autrement\ dit : \boldsymbol{S(1) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)\,2^{k+1}} = \ln 2}$$

Partie III – Cas $a = 2$:

6) Pour tout entier naturel n, $J_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\, dt$.

a- $J_{n+1} - J_n = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} - (1-t^2)^n\, dt = \int_0^1 (1-t^2)^n(1-t^2-1)dt$

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^1 -t^2(1-t^2)^n dt = \int_0^1 \frac{1}{2}t \times (-2t)(1-t^2)^n dt$$

On effectue une intégration par parties en posant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{u(t) = \frac{1}{n+1}(1-t^2)^{n+1}} \quad et \quad \boldsymbol{u'(t) = (-2t)(1-t^2)^n} \\ \boldsymbol{v(t) = \frac{1}{2}t} \quad et \quad \boldsymbol{v'(t) = \frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$J_{n+1} - J_n = \left[\frac{t(1-t^2)^{n+1}}{2(n+1)}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{2(n+1)}dt$$

$$J_{n+1} - J_n = 0 - 0 - \frac{1}{2n+2}\int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\, dt = -\frac{1}{2n+2}J_{n+1}$$

$$\boldsymbol{J_{n+1} - J_n = -\frac{1}{2n+2}J_{n+1}}$$

b-

$$ainsi: \left(1+\frac{1}{2n+2}\right)J_{n+1} = J_n \iff \frac{2n+3}{2n+2}J_{n+1} = J_n$$

$$\boldsymbol{J_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}J_n}$$

c- On calcule : $J_0 = \int_0^1 1\, dt = [t]_0^1$ $donc\ J_0 = 1$ Et d'après 6) b :

$$J_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}J_n = \frac{2n+2}{2n+3}\times\frac{2n}{2n+1}\times\frac{2n-2}{2n-1}\times \dots \times J_0$$

$$J_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}\times\frac{2n+2}{2n+2}\times\frac{2n}{2n+1}\times\frac{2n}{2n}\times\frac{2n-2}{2n-1}\times \dots \times J_0$$

$$J_{n+1} = \frac{2^2(n+1)^2\times 2^2n^2\times 2^2(n-1)^2\times \dots \times 2^2\times 1^2}{(2n+3)!}J_0$$

$$J_{n+1} = \frac{2^{2(n+1)}\,[(n+1)n(n-1)\times \dots \times 1]^2}{(2n+3)!}J_0 = \frac{2^{2n+2}\,[(n+1)!]^2}{(2n+3)!}\times 1$$

$$\boldsymbol{Ainsi : \quad J_n = \frac{[2^n\, n!]^2}{(2n+1)!}}$$

7) La fonc0tion $t \to \arctan t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée : $t \to \frac{1}{1+t^2}$

$$d'où: S(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 \quad et \quad \boldsymbol{S(2) = \frac{\pi}{4}}$$

8) D'après 2) et 5) et la linéarité de l'intégrale sur une somme finie, on peut écrire :

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t^2)^k}{2^{k+1}} + \frac{(1-t^2)^{n+1}}{2^{n+1}\,(1+t^2)}$$

$$S(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \int_0^1 (1+t^2)^k dt + \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{2^{n+1}\,(1+t^2)}\,dt$$

$$S(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{J^k}{2^{k+1}} = \int_0^1 \frac{\left(1-t^2\right)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t^2)}dt$$

$$or:\ \frac{J^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} \times \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}\ \ donc\ :$$

$$\left|S(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}\right| = \left|\int_0^1 \frac{\left(1-t^2\right)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t^2)}dt\right| \quad avec \quad \frac{1}{2} \le \frac{1}{1+t^2} \le 1$$

$$d'où:\quad 0 \le \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{2^{n+1}} \le \int_0^1 \frac{\left(1-t^2\right)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t^2)}dt \le \int_0^1 \frac{\left(1-t^2\right)^{n+1}}{2^{n+1}}dt$$

$$et\quad \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{2^{n+1}}dt = \frac{J^{n+1}}{2^{n+1}} \le \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$car\quad J_{n+1} = \prod_{i=0}^{n} \frac{2i+2}{2i+3}\quad avec\quad \forall 0 \le i \le n+1,\qquad \frac{2i+2}{2i+3} \le 1\ \ donc\ J_{n+1} \le 1$$

On en conclut :

$$\left|S(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}\right| = \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t^2)}dt \le \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{2^{n+1}}dt$$

$$et\quad \left|S(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}\right| \le \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$Comme\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0,\qquad S(2) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}$$

$$autrement\ dit:\quad \boldsymbol{S(2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{\pi}{4}}$$