

## Les calculs

Une des plus grandes difficultés en prépa sera d'oublier la calculatrice. En effet, elle est interdite aux épreuves de concours, donc vous allez devoir vous habituer à faire des (petits) calculs à la main. Pour certains ce sera très facile, pour d'autres la route sera peut-être longue avant d'atteindre une dextérité sur les calculs. Ainsi, tout ce qui suit doit être fait SANS CALCULATRICE.

**00.1** Simplifier les expressions suivantes :

- |   |   |
|---|---|
| 1. $6 - 1 \times 2 + 3 \times 0 - 6 : 2$                                    | 10. $\frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} + \frac{\frac{5}{6} - \frac{2}{9}}{\frac{4}{3}}$ |
| 2. $(6 - 1) \times (2 + 3) \times 0 - (6 : 2)$                              | 11. $\sqrt{3^2}$  |
| 3. $6 - (1 \times 2) + 3 \times ((0 - 6) : 2)$                              | 12. $\sqrt{(-3)^2}$   |
| 4. $\frac{3}{2} - \frac{5}{4}$  | 13. $\sqrt{(-2)(-8)}$   |
| 5. $\frac{2 + \frac{1}{3}}{2 - \frac{1}{3}}$                                | 14. $(\sqrt{18})^3$   |
| 6. $(-6)(-3) - 8(-2)$   | 15. $\frac{(4 \times 3)^{-6} \times 8}{9^3}$  |
| 7. $\frac{5}{-1} + (-1)^2(-1)^{-3}$   | 16. $\frac{(4 \times 3)^{10} + 4^9}{8^4}$   |
| 8. $\frac{\frac{3}{2} + \frac{7}{4}}{\frac{1}{3} - 2}$                      | 17. $\left(\frac{8^{-2}}{4^{-4}}\right)^4$  |
| 9. $\frac{\frac{6}{15} + 2 \times \frac{3}{10}}{\frac{1}{4} - \frac{2}{3}}$ | 18. $\frac{2^{n+1} - 6 \times 2^{n-1}}{2^n}$  |

**00.2** Développer les expressions suivantes :

- |                    |   |
|--------------------|---|
| 1. $(x + a)^2$     | 5. $(2a - 1)^2 - (a - 3)(2a + 1)$               |
| 2. $(x - a)^2$     | 6. $(a - b\sqrt{3})^2(a + b\sqrt{3})^2$         |
| 3. $(x + a + b)^2$ | 7. $(e^x - e^{-x})^2 - e^{-x}(e^{3x} + e^{-x})$ |
| 4. $(x + a - b)^2$ | 8. $(3x + 2)^2 - (5 - 2x)(3x - 2)$              |

**00.3** Simplifier les expressions suivantes lorsqu'elles sont définies :

- |                               |                                      |                                  |
|-------------------------------|--------------------------------------|----------------------------------|
| 1. $\frac{x^{-2}x^4}{x^{-3}}$ | 3. $(x^3)^{-2}$                      | 5. $\frac{x^2 - 16}{x - 4}$      |
| 2. $\frac{(xy)^4}{x^3y^3}$    | 4. $\frac{(3x)^3y^{-2}}{2x^4y^{-1}}$ | 6. $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x}$ |

**00.4** Compléter les pointillés :

- $x^2 - 6x - 7 = (x - 3)^2 + \dots$
- $3x^2 - 8x - \frac{1}{3} = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \dots$
- $3x^2 - 7x + 4 = \dots(x - \dots)^2 + \dots$
- $ax^2 + bx + c = a(x - \dots)^2 - \frac{\dots}{4ac}$

**00.5** Résoudre les équations suivantes dans  $\mathbb{R}$  :

- |                            |                                  |
|----------------------------|----------------------------------|
| 1. $x^2 - 6x + 3 = 0$      | 3. $\sqrt{x+4} = 4x + 2$         |
| 2. $3x(1-x) = (1-2x)(x-2)$ | 4. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = 1$ |

**00.6** Pour aller un peu plus loin : manipuler les factorielles

On définit pour tout entier  $n$  le nombre «  $n!$  » défini comme le produit des  $n$  premiers entiers consécutifs, avec la convention que  $0! = 1$ .

On a donc :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n \quad \text{lorsque } n \geq 1$$

Par exemple, on a  $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

- |  |  |
|--|--|
| 1. Calculer $2!$                                       | 6. Calculer $\frac{4!}{2!3!}$                              |
| 2. Calculer $3!$                                       | 7. Calculer $\frac{6!}{2!4!}$                              |
| 3. Calculer $5!$                                       | 8. Calculer $\frac{2!4!8!}{(4!)^2(3!)^3}$                  |
| 4. Calculer $\frac{7!}{4!}$                            |  |
| 5. Calculer $\frac{7! - 6!}{5!}$                       |  |
| 9. Ecrire le nombre suivant à l'aide de factorielles : | $\frac{1 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 4 \times 6}$ |

## Ordre et inégalités

Les relations d'ordre sur les réels (travaux sur les inégalités) posent souvent des problèmes, car on ne se souvient pas vraiment des règles autorisées, interdites, les règles de signes, . . .

**00.7** Ranger dans l'ordre décroissant (SANS CALCULATRICE!) les nombres suivants :

$$-\frac{5}{3}, -\sqrt{2}, \frac{26}{7}, \pi, \frac{23}{8}, \frac{9}{-5}.$$

**00.8** Lequel des deux nombres  $\sqrt{6} + \sqrt{10}$  ou  $\sqrt{5} + \sqrt{12}$  est le plus grand ?

**00.9** Montrer que si  $a < b$ , alors on a :

$$a < \frac{2a + b}{3} \quad \text{et} \quad \frac{a - 4b}{3} < -b$$

**00.10** Résoudre les inéquations suivantes dans  $\mathbb{R}$  (donner une réponse sous forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles).

1.  $3x + 2 > 1$
2.  $5x + 2 > 2x - 7$
3.  $\frac{2x + 1}{x + 3} < 3$
4.  $-9x^2 + 24x - 16 < 0$
5.  $(x - 2)(1 - x) > x(5 - x)$
6.  $\sqrt{x - 2} > x - 5$
7.  $\sqrt{2x - 5} - \sqrt{x - 3} > 1$

**00.11** Soit  $t$  un nombre tel que  $0 < t < 1$ . Ranger dans l'ordre croissant :  $\sqrt{t}, t, t^2, t^3, t\sqrt{t}$ .

**00.12** Montrer que pour tous réels  $x$  et  $y$ , on a :

$$x^2 + xy + y^2 \geq 0$$

**00.13** Pour aller un peu plus loin : manipuler les valeurs absolues

On définit pour tout réel  $x$  le nombre «  $|x|$  » défini comme la partie positive de  $x$ , i.e. :

$$|x| = x \quad \text{si } x \geq 0, \quad |x| = -x \quad \text{si } x \leq 0$$

Par exemple, on a  $|4| = 4$ , mais  $|-2| = 2$ .

1. Résoudre l'équation  $|x| = 3$
2. Résoudre l'équation  $|3x - 7| = 8$
3. Résoudre l'équation  $|3x - 7| = |-2x + 1|$
4. Résoudre l'inéquation  $|x - 3| \leq 6$
5. Résoudre l'inéquation  $|3x + 1| < 2$
6. Résoudre l'inéquation  $|2x - 5| \geq 3$

## Les fonctions logarithme et exponentielle

Vous les avez vues en terminale, elles vont revenir de plus belle cette année, alors autant bien être au point sur ce qu'on a le droit de faire ou non avec.

**00.14** Simplifier les nombres suivants :

1.  $e^{5 \ln 2}$
2.  $2 \ln(4) - 3 \ln(2)$
3.  $\ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3})$
4.  $\ln(8!) - \ln(7!)$
5.  $2 \ln\left(\frac{1}{9}\right) + \ln(3e^{-2})$
6.  $6 \ln \sqrt{2} - \ln\left(\frac{2^3}{3}\right)$
7.  $\frac{e^{2x} + e^x}{e^x}$

**00.15** On suppose que  $a^2 + b^2 = 7ab$ . Montrer que :

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$$

**00.16** Supposons que  $y = \sqrt{1 + e^{2x}}$ .

Exprimer  $x$  en fonction de  $y$ .

**00.17** Supposons que  $y = \ln(e^x + 1)$ .

Exprimer  $x$  en fonction de  $y$ .

**00.18** Supposons que  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

Exprimer  $x$  en fonction de  $y$ .

**00.19** Supposons que  $\ln(e^y - e^x) = y + \ln(2) - \ln(e^y + e^x)$ .

Exprimer  $y$  en fonction de  $x$ .

**00.20** Supposons que  $2 \ln(x - 2y) = \ln x + \ln y$ . Calculer  $\frac{x}{y}$ .

**00.21** Résoudre dans  $\mathbb{R}^{+*}$  l'équation  $(\ln x)^2 - 4 \ln x - 5 = 0$ .

**00.22** Résoudre dans  $]1, +\infty[$  l'inéquation :  $\ln(1 + x) < 2 \ln(x - 1)$ .

## Nombres complexes (pour les S)

**00.23** Déterminer (sous forme algébrique) le conjugué des nombres complexes suivants :

1.  $z_1 = (5 + 2i)^3$
2.  $z_2 = \frac{1 - 2i}{4 - 3i}$
3.  $z_3 = \frac{(1 - i)(2 + i)}{5 - 2i}$
4.  $z_4 = e^{i\pi/4} - i$

**00.24** Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1.  $z_1 = 5$
2.  $z_2 = -36$
3.  $z_3 = -3i$
4.  $z_4 = \sqrt{3}i$
5.  $z_5 = 5 - 5i$
6.  $z_6 = 2i - 2\sqrt{3}$
7.  $z_7 = \frac{1 + i}{\sqrt{3}i - 1}$
8.  $z_8 = \left(\frac{1 - 3i}{i - 2}\right)^{11}$

**00.25** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

1.  $(3i - 7)z + 1 = i(3 - z)$
2.  $z^2 = -7$
3.  $z^2 + z + 1 = 0$
4.  $z^2 = -3 - 4i$

(Pour la dernière, poser  $z = x + iy$  et déterminer des relations vérifiées par  $x$  et  $y$ ).

## Un peu de logique

**00.26** Une maman dit à son fils : « Les élèves bons en maths sont de bons élèves ».  
Son fils lui dit alors : « Je suis un bon élève donc je suis bon en maths ».  
Que pensez-vous de l'affirmation du fils ?

**00.27** Les habitants d'une certaine île sont divisés en deux groupes : le groupe de ceux qui disent toujours la vérité, et le groupe de ceux qui mentent tout le temps.

1. Vous rencontrez une personne sur cette île qui vous dit : « Je mens toujours ». Est-ce un habitant de l'île ?
2. Quelle question peut-on poser à un habitant de l'île pour savoir s'il possède un crocodile ou non ?

**00.28** Une vitre a été brisée par l'un des cinq frères d'une famille. Lorsqu'on les interroge, voici ce que chacun répond :

- John : « C'est soit Henry, soit Thomas, »
- Henry : « Ni Ernest, ni moi n'avons brisé la vitre »
- Thomas : « Henry et John mentent, »
- David : « Non, deux de mes frères parmi John, Henry et Thomas mentent et l'autre dit vrai, »
- Ernest : « Non, David, ce que tu dis n'est pas vrai. »

On décide d'appeler leur père, un homme honnête, qui ajoute que deux de ses fils mentent toujours et que les trois autres sont honnêtes. Qui a brisé la vitre ?

**00.29** Une organisation comporte un patron, un adjoint, un caissier, un porte-parole, un avocat conseil et un sténographe. Les noms des employés sont : M. A, M. B, Mlle C, Mme D, Mlle E et M. F. Identifiez le caissier sachant que :

- l'adjoint est le petit-fils du patron,
- le caissier est le gendre du sténographe,
- le porte-parole est la demi-sœur de Mlle C.
- M. A est célibataire,
- M. B a 25 ans,
- M. F est le voisin du patron.

**00.30** Reformulez les implications suivantes sous la forme « Si . . . alors. . . »

1. Toute fonction dérivable sur l'intervalle  $[a, b]$  est continue sur  $[a, b]$ .
2. La somme deux entiers impairs est un nombre entier pair.
3. Je me fâche dès que je lis une bêtise.
4. Le carré d'un nombre réel est positif.
5. Je prends mon parapluie chaque fois qu'il pleut.
6. Le produit de deux nombres négatifs est positif.
7. Faire des maths me suffit pour être heureux.
8. Toute suite croissante et majorée est convergente.
9. Je progresserai pourvu que je travaille régulièrement.
10. La dérivée d'une fonction dérivable et croissante est positive.
11. Il est nécessaire de posséder un permis pour conduire.
12. La fonction  $f$  s'annule en  $x = 0$ .
13. La fonction  $f$  ne peut s'annuler qu'en  $x = 0$ .
14. Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles.