Lycée du Parc - BCPST2 - YG

Sujet 1

Question de cours

Définition de suites adjacentes.

Exercice 1

1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2+n}{n!}$ converge et déterminer sa somme.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n4^n}{3^{2n+1}}$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0, e^{-1}[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{\ln(u_n)}\right)$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < e^{-1}$.
2. Montrer que (u_n) converge, puis montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{u_n}{\ln(u_n)}$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par :

$$\forall x > 0, f(x) = x + \ln(x)$$

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n > 0$ tel que $f(x_n) = n$.
2. Montrer que la suite (x_n) est croissante et tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
4. Prouver le développement asymptotique suivant :

$$x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

NOM Prénom : | **Date :** | **Classe :**

Commentaires :

2019-2020

Lycée du Parc - BCPST2 - YG

Sujet 2

Question de cours

Croissances comparées entre les suites geéomeétrique a^n (avec a > 1), puissance n^α (avec $\alpha > 0$), et factorielle $n!$.

Exercice 1

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n+1)3^n}{n!}$ converge et déterminer sa somme
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{n^2}{2^n}$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 2

1. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que l'équation $x^n + n^2 x - 1 = 0$ admet une unique solution dans $[0, +\infty[$.
2. Montrer que pour $n \geqslant 1$, $x_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
3. Étudier la convergence de (x_n) et déterminer un équivalent de x_n lorsque $n \to +\infty$.
4. Étudier la convergence des séries $\sum x_n$, $\sum \ln(x_n)$ et $\sum \left(x_n - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2(u_n^2+1)}$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) = \dfrac{1}{2(x^2+1)}$.
   (a) Montrer que f admet un unique point fixe α sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Montrer qu'il existe un réel $k \in]0, 1[$ tel que :
   $$\forall x, y \in \mathbb{R}^+,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n - \alpha| \leqslant k^n |u_0 - \alpha|$.
3. En déduire que (u_n) converge vers α, puis déterminer la nature de la série de terme général $u_n - \alpha$.

NOM Prénom : | **Date :** | **Classe :**

Commentaires :

2019-2020

Sujet 3

Question de cours

Rappeler la valeur de la somme $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2}$, en précisant pour quel(s) réel(s) x la série est bien convergente.

Exercice 1

1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{2n-1}{4^n}$ converge et déterminer sa somme.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 2

Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - x_n)$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $e^t - t > 1$.
   En déduire que $x_n > 0$ pour tout $n \geqslant 0$.
2. Montrer que la suite (x_n) converge vers une limite ℓ à déterminer.
3. Calculer $e^{x_{n+1}}$ pour tout $n \geqslant 0$.
   En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ converge et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite implicite définie telle que u_n est l'unique solution sur $[0, +\infty[$ de :

$$x^n + 9x^2 - 4 = 0$$

1. Montrer que $x \mapsto x^n + 9x^2 - 4$ s'annule bien une seule fois sur $[0, +\infty[$, en un réel noté u_n.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $0 < u_n < 2/3$.
4. En étudiant u_n^n, déterminer la limite de (u_n).

Lycée du Parc - BCPST2 - YG

NOM Prénom : **Date :** **Classe :**

Commentaires :

2019-2020