Lycée du Parc - BCPST2 - YG

Sujet 1

Question de cours

Rappeler la valeur de la somme $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2}$, en précisant pour quel(s) réel(s) x la série est bien convergente.

Exercice 1

1. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{(n+2)2^n}{n!}$ converge et déterminer sa somme
2. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 2

Soit la suite (t_n) définie par $t_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = \frac{t_n}{1 + nt_n^2}$.

1. Étudier la monotonie de la suite (t_n).
2. Montrer que (t_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 3

1. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que l'équation $x^n + n^2 x - 1 = 0$ admet une unique solution dans $[0, +\infty[$.
2. Montrer que pour $n \geqslant 1$, $x_n \leqslant \frac{1}{n^2}$.
3. Étudier la convergence de (x_n) et déterminer un équivalent de x_n lorsque $n \to +\infty$.
4. Étudier la convergence des séries $\sum x_n$, $\sum \ln(x_n)$ et $\sum \left(x_n - \frac{1}{n^2}\right)$.

NOM Prénom :

Date :

Classe :

Commentaires :

2019-2020

Lycée du Parc - BCPST2 - YG

Sujet 2

Question de cours

Rappeler la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$, en précisant pour quel(s) réel(s) x la série est bien convergente.

Exercice 1

1. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{n+2}{3^n}$ converge et déterminer sa somme.
2. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 2

On admet que : $\forall t \in \mathbb{R},\ 1+t \leqslant e^t$
Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - x_n)$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

1. Montrer que $x_n > 0$ pour tout $n \geqslant 0$.
2. Montrer que la suite (x_n) converge vers une limite ℓ à déterminer.
3. Calculer $e^{x_{n+1}}$ pour tout $n \geqslant 0$.

   En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 0} x_n$ converge et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

Exercice 3

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, l'équation $\frac{\ln^2(x)}{x} = \frac{1}{n}$ admet une unique solution sur $[e^2, +\infty[$, que l'on notera u_n.
2. Montrer que (u_n) est strictement monotone.
3. Montrer que (u_n) admet une limite que l'on précisera.
4. On note $a_n = \frac{u_n}{n}$ et on admet que $\ln(a_n) = \underset{n \to +\infty}{o}(\ln(n))$. Prouver alors que $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln^2(n)$.
5. En déduire un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.

NOM Prénom : **Date :** **Classe :**

Commentaires :

2019-2020

Lycée du Parc - BCPST2 - YG

Sujet 3

Question de cours

Définition d'une série de réels absolument convergente.

Exercice 1

1. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{n+1}{n!}$ converge et déterminer sa somme.
2. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{n4^n}{3^{2n+1}}$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0, e^{-1}[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{\ln(u_n)}\right)$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < e^{-1}$.
2. Montrer que (u_n) converge, puis montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
3. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{u_n}{\ln(u_n)}$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 3

Pour $n \geqslant 3$ et $x \in [0, n]$, on note : $f_n(x) = x^n e^{-x} - 1$.

1. Soit $n \geqslant 3$.
   (a) Étudier les variations de la fonction f_n sur $[0, n]$.
   (b) En déduire que l'équation $x^n = e^x$ a une unique solution dans l'intervalle $[0, n]$. On note u_n cette solution.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 3, u_n > 1$.
3. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$ est convergente et déterminer sa limite.
5. On pose : $v_n = u_n - 1$. Montrer que $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
6. Les séries $\sum u_n$ et $\sum (u_n - 1)$ sont-elles convergentes ?

NOM Prénom : **Date :** **Classe :**

Commentaires :

2019-2020